فصل اول

بخش حساب

شاگردان عزیز!

قبل از حل سوالات بخش حساب به فورمول ها و روابط مربوط آن توجه فرمایید:

اعداد کسری:

1. $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$
2. $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$
3. $\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=\frac{a\pm b}{c}$
4. $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$
5. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
6. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

نسبت حسابی: نسبت حسابی بین اعداد a و b:

$a-b$

نسبت هندسی: نسبت هندسی بین اعداد a و b:

$\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$

اوسط حسابی: در صورتی که n تعداد اعداد باشد پس اوسط حسابی آنها عبارت است از:

$$\frac{a+b+c+\cdots}{n}$$

تناسب: مساوی بودن دو نسبت را تناسب می گویند یعنی:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

خواص تناسب: با در نظر داشت تعریف ، خواص تناسب عبارت از:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

1) $a\cdot d=b\cdot c$

2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

3) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

4) $\frac{an}{b}=\frac{cn}{d}, n\neq 0$

5) $\frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}, n\neq 0$

6) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

7) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

8) $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

9) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

10) $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

11) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

12) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=n\Rightarrow\frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots}=n$

قاعده اعداد: اعداد قابل استفاده در حیات روزمره به قاعده (10) می باشد، مثلاً:

$$\begin{aligned}2347 &= 2000 + 300 + 40 + 7\\ &= 2\cdot 10^{3} + 3\cdot 10^{2} + 4\cdot 10^{1} + 7\cdot 10^{0}\end{aligned}$$

فکتوریل: حاصل ضرب اعداد طبیعی از یک الی n فکتوریل نامیده می شود، یعنی:

$$n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n$$

ترکیب اعداد: در حالیکه $n,r\in IN$ و $n\geq r$ است پس ترکیب اعداد عبارت است از:

$$C\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$$

اوسط هندسی: اگر در یک تناسب طرفین یا وسطین مساوی و نامعلوم باشد یعنی $\frac{m}{b}=\frac{a}{m}$ و یا $\frac{b}{m}=\frac{m}{a}$ پس وسط هندسی آن عبارت از:

$$m=\sqrt{a\cdot b}$$

ربح ساده (بسیط): در صورتیکه S سرمایه، N نرخ (به فیصدی)، M مدت (به سال) و R ربح را نشان دهد، فورمول ربح ساده عبارت از:

$$N=\frac{R\cdot 100}{S\cdot M}\quad,\quad M=\frac{R\cdot 100}{N\cdot S}\quad,\quad S=\frac{R\cdot 100}{M\cdot N}\quad,\quad R=\frac{S\cdot M\cdot N}{100}$$

ربح مرکب: اگر A سرمایه اولی ، P سرمایه بعدی ، r نرخ (فیصدی) ، n مدت به سال و B مفاد را نشان دهد ، فورمول ربح مرکب عبارت از:

$$P=A(1+r)^n$$
$$B=P-A$$

ست Set: مجموعه از عناصر دقیق را ست می گویند.

عناصر ست: اشیای که شامل یک ست باشد عناصر ست گفته می شوند، مثلاً: $A=\{2,5,8\}$ اعداد 8,5,2 عناصر ست A گفته می شود که چنین نمایش داده می شود.

$$2\in A\quad,\quad 5\in A\quad,\quad 8\in A$$

ست خالی: ست که هیچ عنصر نداشته باشد ست خالی گفته می شود و به سمبول ϕ نشان داده می شود.

ست های معادل: ست های که تعداد عناصر شان با هم مساوی باشند، مانند:

$$A=\{1,2,8\}\quad,\quad B=\{a,m,d\}$$

ست های مساوی: ست های که دارای عین عناصر باشند، مانند:

$$A=\left\{-3,2,\frac{5}{3}\right\}\quad,\quad B=\left\{2,1\frac{2}{3},-3\right\}$$

ست فرعی: ستی که تمام عناصر آن شامل یک ست دیگر باشد آنرا ست فرعی همان ست دومی می نامند.

مثلاً ست $A=\{a,b,c,d\}$ یک ست فرعی {تمام حروف انگلیسی} = B می باشد و چنین نمایش داده می شود.
$A\subset B$

به خاطر داشته باشید که:

1. $A\subset A$
2. $\phi\subset A$
3. در حالیکه n تعداد عناصر یک ست را نشان دهند، تعداد ست های فرعی آن ست عبارت از: 2^n

اتحاد ست ها: اتحاد چندین ست عبارت از ستی است که عناصر تمام ست های داده شده را دارا باشد.

مثلاً: اگر

$$A=\{2,5\} \quad , \quad B=\{1,2,3\}$$
$$\Rightarrow C=A\cup B=\{1,2,3,5\}$$

به خاطر داشته باشید که:

1) $A\cup A=A$
2) $A\cup\phi=A$

تقاطع ست ها: تقاطع چندین ست عبارت از ستی است که فقط عناصر مشترک ست های داده شده را دارا باشد.

مثلاً:

$$A=\{4,5,7\} \quad , \quad B=\{8,4,2\}$$
$$\Rightarrow A\cap B=\{4\}$$

به خاطر داشته باشید که:

1) $A\cap A=A$
2) $A\cap\phi=\phi$

مکمله یک ست: اگر ست A ست فرعی از ست B باشد مکمله ست A در B عبارت از ستی است که عناصر آن در B باشد اما شامل A نباشد که آنرا به $A^{'}$ و یا C_B^A نمایش می دهند.

مثلاً:

$$A=\{1,2,3\} \quad , \qquad B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$\Rightarrow A^{'}=C_B^A=\{4,5,6,7\}$$

تفاضل دو ست: دو ست A و B را در نظر می گیریم.

$A \setminus B=$ {عناصر که در A باشد و در B نباشد}

$B \setminus A=$ {عناصر که در B باشد و در A نباشد}

مثلاً:

$$A=\{1,2,5,8\} \ , \qquad B=\{3,4,5,7,8\}$$
$$\Rightarrow A \setminus B=\{1,2\}$$
$$\Rightarrow B \setminus A=\{3,4,7\}$$

ست اعداد:

1) ست اعداد طبیعی:

$$IN=\{1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$$

2) ست اعداد کامل:

$$IN^{'}=\{0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\}$$
$$\Rightarrow IN \subset IN^{'}$$

3) ست اعداد تام:

$$I=Z=\{-\infty,\cdots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\cdots,+\infty\}$$
$$\Rightarrow IN^{'} \subset Z$$

4) ست اعداد ناطق (نسبتی): ست که تمام عناصر در شکل کسری باشد.

$$Q=\left\{\frac{a}{b}/a,b\in Z,b\neq 0\right\}$$

$$\Rightarrow Q=\left\{\cdots,-2.5,-\frac{3}{4},-1\frac{1}{2},7.25,\frac{8}{11},\cdots\right\}$$

5) ست اعداد غیر ناطق (غیر نسبتی): ست که عناصر آن به کسر تبدیل نگردد یعنی اعداد جذری که جذر کامل نداشته باشند و به Q' نمایش داده می شود.

6) ست اعداد حقیقی: ستی که عناصر آن شامل تمام اعداد ناطق و غیر ناطق باشد، ست اعداد حقیقی گفته می شود و به IR نمایش داده می شود.

$$IR=Q\cup Q'$$

7) ست اعداد موهومی: ست که عناصر آن اعداد منفی به حیث جذور به جذر های که دارای جذر نما جفت است، باشد یعنی:

$\text{Im}=\left\{x_i\ /\ x\in IR,i=\sqrt{-1}\right\}$ $i=\sqrt{-1}$ واحد اعداد موهومی

8) ست اعداد مختلط: ستی که عناصر آن متشکل از اعداد حقیقی و موهومی باشد یعنی:

$$C=\left\{a\pm bi\ /\ a,b\in IR,i=\sqrt{-1}\right\}$$

سوالات

1. عدد 345 بالای کدام اعداد قابل تقسیم است ؟

1) $5,4,3$ 2) $5,7,3$ 3) $5,3$ 4) $5,7$

2. هر گاه عدد 13^{14} بالای 4 تقسیم گردد باقی مانده آن مساوی است به ؟

1) 0 2) 2 3) 1 4) 4

3. هر گاه عدد a بالای 15 تقسیم گردد 12 باقی مانده در صورتیکه a بالاه 12 پوره قابل تقسیم باشد پس کوچک ترین قیمت a عبارت است از ؟

1) 48 2) 68 3) 72 4) 132

4. عدد a بالای 12تقسیم گردد 11 باقی مانده . هر گاه حاصل تقسیم آن 13 باشد . پس a مساوی است از ؟

1) 134 2) 145 3) 156 4) 167

5. کوچک ترین کسر های $0{,}002$ ، $0{,}003$ ، $0{,}00025$ و $0{,}00035$ عبارت است از ؟

1) $0{,}00035$ 2) $0{,}003$ 3) $0{,}002$ 4) $0{,}00025$

6. هر گاه عدد a بالای هر یک از اعداد 6, 8 , 12 تقسیم گردد 5 باقی می ماند پس a عبارت است از ؟

1) 19 2) 24 3) 29 ۴) 34

7. $2[(18)-(2)^4]\cdot 2[3-(-5)]^0+50=?$

1) 52 2) 64 3) 58 4) 4

8. $8!=?$

1) 5420 2) 40320 3) 720 4) 40520

.9 در یک صندوق مکعبی که حجم آن $10m^3$ است چند عدد صندوقچه مکعبی $1m^3$ در آن جابجا کرده میتوانیم ؟

1) 100000 2) 300000 3) 10000 4) 200000

.10 اوسط حسابی کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک اعداد 30 , 40 , 60 مساوی است به ؟

1) 50 2) 55 3) 60 4) 65

.11 $\left\{2-\left[-1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}\cdot\{5-[-1-(-2)]\}=?$

1) 11 2) 12 3) 13 4) 14

.12 در صورتیکه $\frac{a}{b}$ معادل $\frac{5}{11}$ و $a=15$ باشد ، پس قیمت b را در یابید ؟

1) 11 2) 22 3) 33 ۴) 44

.13 کسر های $\frac{8}{13}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{4}$ را مقایسه نمایید ؟

1) $\frac{8}{13}<\frac{7}{12}<\frac{3}{4}$ 2) $\frac{7}{12}<\frac{8}{13}<\frac{3}{4}$

3) $\frac{7}{12}>\frac{3}{4}>\frac{8}{13}$ 4) $\frac{3}{4}<\frac{7}{12}<\frac{8}{13}$

.14 کسر الکسر $\dfrac{5-\frac{5}{2}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$ عبارت است از ؟

1) $\frac{11}{7}$ 2) $-\frac{13}{7}$ 3) $-\frac{17}{7}$ 4) -11

.15 $\left(2-\frac{1}{3}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right):\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)=?$

1) $2\frac{1}{3}$ 2) $1\frac{2}{3}$ 3) $1\frac{1}{3}$ 4) $3\frac{1}{2}$

.16 نتیجه افاده $\left(1-0{,}2:0{,}4+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{0{,}1}=?$ عبارت است از ؟

1) $0{,}11$ 2) $1{,}1$ 3) 26 4) -1

.17 قیمت افاده $\left[\frac{\left(0{,}7-\frac{1}{5}\right)\times\frac{2}{5}}{3{,}5-1\frac{1}{2}}\right]\div 0{,}5=?$ عبارت است از ؟

1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{10}$

.18 نتیجه عملیه $\frac{1}{\frac{0{,}1}{0{,}11}+\frac{0{,}2}{0{,}22}-\frac{0{,}4}{0{,}44}}$ عبارت است از ؟

1) $\frac{11}{10}$ 2) 11 3) $-\frac{11}{10}$ 4) -11

.19 نتبجه عملیه $\left(4\frac{2}{5}\right)^{-1}\div\frac{3\frac{1}{2}\div(-7)+1}{-3\div\left(-2\frac{1}{2}\right)+1}=?$ عبارت است از ؟

1) 2 2) 1 3) 3 4) 0

.20 $\frac{-3}{-2-\frac{-2}{1-(2^{-1})+1}}\div\frac{4}{4-\frac{4}{4-\frac{1}{4^{-2}}}}=?$ مساوی است به ؟

1) $\frac{32}{39}$ 2) $\frac{39}{32}$ 3) $\frac{37}{39}$ 4) $\frac{34}{35}$

.21 نتیجه عملیه $\left(\frac{1-1\frac{1}{3}}{1+1\frac{1}{3}}\right)^2\left(\frac{7}{2}\right)^2=?$ عبارت است از ؟

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) 1 ۴) 4

.22 نتیجه عملیه $\frac{\left(2^{-1}-3^{-1}+4^{-1}\right)^{-1}}{\left(5^{-1}-6^{-1}\right)^{-1}}=?$ عبارت است از ؟

1) $\frac{6}{19}$ 2) $\frac{2}{25}$ 3) $\frac{25}{2}$ 4) 72

.23 $\left[2^{-1}+\left(1+\frac{2}{3^{-1}}\right)\div\frac{2}{\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}}-2\right]^{-1}=?$

1) $\frac{6}{19}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{19}{6}$ 4) $\frac{6}{17}$

.24 هرگاه $A=\frac{0,01}{0,2}+\frac{0,02}{0,3}+\frac{0,03}{0,4}$ و $B=\frac{0,19}{0,2}+\frac{0,14}{0,15}+\frac{0,37}{0,4}$ باشد پس قیمت $A+B$ را در یابید ؟

1) -1 2) 1 ۳) 2 4) 3

.25 عدد $(5,2)\ 10^4$ عبارت است از ؟

1) 52000 2) 5200 3) 520 4) 52

پول جلال چهار برابر پول نسیم است هرگاه نسیم 40 افغانی داشته باشد پس معلوم نمایید که جلال چند افغانی دارد ؟

.26 1) 120 2) 140 3) 160 4) 180

.27 یک موتر راه مزار شریف – کابل را با سرعت $140\frac{km}{h}$ در ظرف 7 ساعت طی می نماید معلوم نمایید که موتر مذکور این فاصله را با کدام یکی سرعت در ظرف 10 ساعت طی می نمایید ؟

1) $81\frac{km}{h}$ 2) $84\frac{km}{h}$ 3) $89\frac{km}{h}$ 4) $98\frac{km}{h}$

.28 یک فامیل در دو ماه 20000 افغانی مصرف می نماید. حال در یابید که فامیل مذکور در یک سال چند افغانی مصرف خواهد نمود ؟

1) 120000 2) 150000 3) 180000 4) 200000

.29 یک نل یک حوض را در 3 ساعت ، نل دومی در 9 ساعت پر میکنند و نل سومی در 6 ساعت عین حوض را خالی میکند هرگاه هر سه نل همزمان باز گردد حوض مذکور در چند ساعت پر خواهد شد ؟

1) $3,6$ 2) $3,2$ 3) 1.5 4) $1,8$

.30 قرار است که 8000 مسافر توسط یک ریل که دارای 20 واگون است در 10 بار انتقال باید هرگاه بعداز 6 بار و 15 واگون ریل مذکور خراب شود . در یابید که مسافرین باقی مانده ریل مذکور در چند بار انتقال خواهد نمود ؟

1) 18 2) 10 3) 12 4) 16

31. مبلغ 5070 افغانی را به نسبت های 1 , 2 , 3 عبارت است از ؟

1) $\begin{cases} 840 \\ 2540 \\ 1690 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2535 \\ 1690 \\ 845 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 1680 \\ 855 \\ 2535 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2605 \\ 1620 \\ 855 \end{cases}$

32. 9000 به نسبت های 6 , 3 عبارت است از ؟

1) 3 ,6 2) 30 , 60

3) 300 , 600 4) 3000 , 6000

33. احمد $24m$ تکه را به قیمت 720 خریده است پس با قیمت 1020 افغانی چند متر تکه را خریده میتواند ؟

1) 28 2) 32 3) 34 4) 38

34. حمید روزانه که 5 ساعت درس میخواند در یک هفته 2800 سوال ریاضی را جل مینماید اگر روزانه 7 ساعت سوال حل نمایید 2800 سوال را در چند روز حل خواهد نمود ؟

1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

35. قرار است که 8000 مسافر توسط یک ریل که دارای 20 واگون است در 10 بار انتقال باید هرگاه بعداز 6 بار و 15 واگون ریل مذکور خراب شود . در یابید که مسافرین باقی مانده ریل مذکور در چند بار انتقال خواهد نمود ؟

1) 18 2) 10 3) 12 4) 16

36. در سرمایه 2000000 افغانی محمود 30% سهم دارد مقدار سرمایه محمود مساوی است به ؟

1) 600 2) 6000 3) 60000 4) 600000

37. هرگاه 5 نل هم قطر در جریان 4 روز یک حوض را پر نموده بتوانند 4 نل مشابه حوض مذکور را در چند روز پر خواهد نمود ؟

1) 6 2) 5 3) 4 4) ۳

38. اگر زون 20 کارتن صابون 300 کیلو گرام باشد پس وزن چند کارتن صابون 120 کیلو گرام است ؟

1) 9 2) 8 3) 10 4) 7

39. اگر 25% یک عدد 80 باشد، خود عددچند است ؟

1) 320 2) 640 3) 860 4) 1280

40. قیمت فروش یک جنس با 35% فایده 2700 افغانی میباشد ، پس قیمت خرید جنس چند افغانی است ؟

1) 1500 2) 2000 3) 2350 4) 2500

41. $\frac{3}{7}$حصه یک عدد 6 است پس $\frac{5}{14}$ حصه عدد مذکور را معلوم نمایید ؟

1) 28 2) 10 3) 14 4) 5

42. تاجری با 60% تخفیف یک جنس را بالای مشتری خود به مبلغ 140 افغانی به فروش می رساند پس قیمت اصلی جنس مساوی است به ؟

1) 1500 2) 1200 3) 150 4) 120

43. محصول گمرگی یک جنسی از قرار 10% مساوی به 50 افغانی است قیمت جنس به افغانی عبارت است از ؟

1) 500 2) 250 3) 550 4) 100

44. شخصی یک جنس را که 5300 افغانی قیمت دارد بعد از تخفیف به 4985 افغانی خریداری کرد ، خریدار جنس مذکور را به چند فیصد تخفیف خریده است ؟

1) 17% 2) 13% 3) 6% 4) 7%

45. مفاد مبلغ 2000 $ به نرخ 12% در مدت دوسال عبارت است از ؟

1) 420 2) 360 3) 530 4) 480

46. هرگاه مبلغ 10000 افغانی به نرخ 10% به ربح مرکب گذاشته شود ، در چند سال مبلغ 3310 افغانی مفاد میکند؟

1) 1 سال　2) 3 سال　3) 4 سال　4) 3 سال

47. تقاطع ست های $A = \{M, N, P, T, S\}$ و $B = \{O, PN, T, S\}$ مساوی است به ؟

1) $\{N, P, T, S\}$　2) $\{N, P, T\}$

3) $\{M, P, T\}$　4) $\{N, P, T, S, T\}$

48. اگر 25% یک عدد 80 باشد، خود عددچند است ؟

1) 320　2) 640　3) 860　4) 1280

49. $\frac{3}{7}$حصه یک عدد 6 است پس $\frac{5}{14}$ حصه عدد مذکور را معلوم نمایید ؟

1) 28　2) 10　3) 14　4) 5

50. تعداد داخله یک صنف درسی 20 نفر است که 4 نفر آن غیر حاضر است فیصدی شاگردان حاضر در صنف مساوی است به ؟

1) 90%　2) 80%　3) 70%　4) 60%

51. جنسی به ارزش 5800 افغانی با $\% \ 15$ تخفیف به فروش می رسد پس قیمت خرید عبارت است از ؟

1) 5050　2) 4700　3) 4930　4) 48100

52. جنس به ارزش 2700 افغانی به تخفیف 10% به فروش می رسد قیمت فروش عبارت است از ؟

1) 1500　2) 2430　3) 6000　4) 9000

53. جنسی به ارزش 3240 افغانی به تخفیف 15% به فروش می رسد قیمت فروش را معلوم نمایید ؟

1) 3000　2) 2907　3) 2917　4) 2927

54. اگر ست های $A = \{1,3, x\}$ و $B = \{1,2,3, \}$ باهم مساوی باشند x چند است ؟

1) 2　2) 3　3) 2　4) $\emptyset$

.55 نظر به ست های $A=\{1,2,3,4,6\}$ ، $B=\{1,3,4,6\}$ و $(A\cap B)\cup\ C=\{8,4,6,\}$
$C=?$ عبارت است از ؟

1) $\{1,3,4,6\}$ 2) $\{1,3,4,6,8\}$ 3) $\{1,3,4,5,6,8\}$ 4) $\{4,6\}$

.56 اگر $A=\{1,3,5,7\}$ و $B=\{2,4,6\}$ باشد $(A\cup B)/(A\cap B)=?$

1) $\{2,4,6\}$ 2) $\{1,3,5,7\}$
3) $\{1,3,5,6\}$ 4) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$

.57 سرمایه 2500 دالر در مدت سه سال از قرار نرخ ٪20 به ربح مرکب چند می گردد:

1) 3140 2) 4320 3) 4130 4) 3870

.58 ست ارقام عدد "3400803" عبارت است از:

1) $\{4,3,8\}$ 2) $\{8,4,3,0\}$ 3) $\{3,4,0,0,0,8,3\}$ 4) $\{0,3,6\}$

.59 نظر به ست $A=\{1,2,3,4,5\}$ کدام یکی از جوابات ذیل صحت دارد؟

1) $1\subset A$ 2) $2\subseteq A$ 3) $3\notin A$ 4) $4\in A$

.60 اگر $A=\{1,2,\cdots\cdots,10\}$ و $B=\{2,3,5,7,9\}$ باشد پس مکمله ست B نظر به A یعنی B' عبارت از:

1) ست A 2) $\{1,2,3,4,5,7,9\}$
3) $\{3,4,5,6,7,8,9\}$ 4) $\{1,4,6,8,10\}$

.61 تقاطع ست های $A=\{1,15,7,9\}$ و $B=\{0,3,9,2\}$ عبارت از:

1) $\{1,15\}$ 2) $\{1,2\}$ 3) $\{2,9\}$ 4) $\{9\}$

.62 اگر $A=\{0,1,2,3,4\}$, $B=\{0,2,4,6,8\}$ و $C=\{1,5,6,7\}$ سه ست باشند تعداد عناصر اتحاد آنها $n(A\cup B\cup C)=?$ عبارت است از:

1) 5 2) 6 3) 9 4) 14

.63 ست تقاطع ست های $A=\{a,b,c,(a),(a,b)\}$ و $B=\{a,(a,c),(b),(a,b)\}$ عبارت است از:

1) $A\cap B=\{a,(a,c)\}$ 2) $A\cap B=\{a,(a,b)\}$
3) $A\cap B=\{a,(c,b)\}$ 4) $A\cap B=\{a,b,c\}$

64. اگر $A=\{a,b,c,d\}$, $A\cup B=\{a\,,b\,,c\,,d\,,e\,,f\}$ و $A-B=\{a,b\}$ باشد در این صورت ست $B-(A\cap B)$ عبارت از:

1) $\{c,d\}$ 2) $\{e,f\}$ 3) $\{c,d,e,f\}$ 4) $\emptyset$

65. تعداد ست های فرعی ست $\{1,2,\{1\},\{1,2\},\{2\}\}$ عبارت است از:

1) 16 2) 32 3) 64 4) 128

66. برای $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{3,4,5,7\}$ کدام یکی از جوابات ذیل صحت دارد؟

1) $A\backslash B=\{2,3\}$ 2) $A\backslash B=\{2,5\}$

3) $A\backslash B=\{2,6\}$ 4) $A\backslash B=\{3,5,7\}$

67. اگر $A=\{x/x<8, x\in k\}$ در این صورت $n(A)=?$

1) 8 2) 7 3) 9 4) ∞

68. اگر $B=\{0,1,(1),\phi,(1,0)\}$ باشد پس تعداد عناصر ست B عبارت است از:

1) 4 2) 3 3) 5 4) 6

69. اگر $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{b,d,\,f,g\}$ باشد قیمت $B-A=?$ عبارت است از:

1) $\{a,c,e\}$ 2) $\{a,b,g\}$ 3) $\{b,d\}$ 4) $\{f,g\}$

فصل دوم

افاده های الجبری

طاقت: هرگاه یک عدد یا حد مانند n, a مراتبه در خودش ضرب گردد در شکل طاق چنین تعریف گردیده است.

$$a \cdot a \cdot a \cdots a = a^n$$

a به نام قاعده و n به نام نما (طاقت نما) یاد می گردد.

قوانین طاقت:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

5) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6) $a^0 = 1$

7) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

8) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

پولینوم الجبری: آن افاده یک یا چندین حده الجبری که حروف آن دارای طاقت نما های اعداد کامل باشد پولینوم الجبری نامیده می شود.

مانند:

$$x^3-2x+4\ \ ,2x^2+x-2\ ,x-1\ ,\cdots\cdots\cdots$$

پولینوم کامل: پولینومی که تمام طاقت نما های حدود آن از بالا تا پایین موجود باشد.

مانند:

$$x^4+5x^3-x^2+x\ \ ,x^3+5x^2-x+4\ \ ,\cdots\cdots\cdots$$

پولینوم ناقص: پولینوم که بعضی از طاقت نما های حدود آن موجود نباشد.

مانند:

$$2x^5+x^3+3x^2-5$$

پولینوم منظم و غیر منظم: پولینوم که طاقت نما حروف آن از زیاد به طرف کم (نزولی) و یا از کم به طرف زیاد (صعودی) ترتیب شده باشد منظم و در غیر آن غیر منظم نامیده می شود.

مثلاً:

منظم نزولی $2y^3-3y^2+4y-1$

منظم صعودی $2-z+z^2-2z^3+5z^4$

غیر منظم $8x^4-x+5+2x^3+x^2$

پولینوم های معادل: پولینوم های که عین متحول داشته و حدود مشابه آن دارای ضریب های مساوی باشند.
مانند:

$$h(y+1)^2+p(y+1)+m\ \ ,2y^2-3y+5\ \ \ ,2y^2-3y+5$$

انواع پولینوم ها: پولینوم یک حده یا مونوم، دو حده یا بینوم و سه حده یا ترینوم از جمله انواع پولینوم ها گفته می شوند. مانند:

مونوم $5x$، بینوم $mb+n$، ترینوم $5x^3+3x-1$

به خاطر داشته باشید که افاده الجبری مانند $\sqrt{3x}-\frac{2}{y}+5$ را مولتی نوم می نامند.

درجه پولینوم: بلند ترین طاقت نما حرف یک پولینوم درجه پولینوم نامیده می شود. مانند:

پولینوم درجه سوم $5x^3 - 2x^2 + x + 1$

و پولینوم $a^5 + 3a^2b^6 - 8b^{11}$ از جنس a درجه 5 از جنس b درجه 11 و از جنس ab درجه $8 = (2+6)$ نامیده می شود.

پولینوم ثابت: پولینوم که درجه آن صفر باشد یا ضرایب حدود آن صفر باشد پولینوم ثابت نامیده می شود. مثلاً m را دریابید در صورت که $(5m-15)x^2 + 7$ یک پولینوم ثابت باشد.

$$5m - 15 = 0 \Rightarrow 5m = 15 \Rightarrow m = 3$$

پولینوم صفری: پولینوم که حد ثابت آن صفر باشد. مانند: $P(x) = 0$ ، و پولینوم صفری درجه ندارد.

پولینوم متجانس: پولینوم که توان های تمام حدود آن با هم مساوی باشد، مانند:

$$5m^2 - 6n^2 + p^2$$

قیمت یک پولینوم: هرگاه به عوض متحول در یک پولینوم یک عدد حقیقی وضع گردد و یک عدد حقیقی به دست آید، همین عدد به دست آمده قیمت پولینوم گفته می شود. مثلاً:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 4$$
$$x = 2$$
$$P(2) = (2)^3 - 5(2)^2 + 4 = 8 - 20 + 4 = -8$$

مطابقت ها: مساوات افاده های الجبری که بنابر تمام قیمت های متحول مربوط با هم مساوی باشند مطابقت گفته می شود.

برای $n=1,2,3,\cdots$

1− $(x\pm y)^n = x^n \pm nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
- $(x+y+z+\cdots)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots + 2(xy + xz + yz + \cdots)$

برای $n=1,2,3,\cdots$

2− $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + y^{n-1})$

برای $n=2,4,6\cdots$ (اعداد جفت)

3− $x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - y^{n-1})$

- $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
- $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$
- $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$
- $x^4 - y^4 = (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$
- $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

برای $n=1,3,5,7,\cdots$ (اعداد طاق)

4− $x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + y^{n-1})$

- $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$
- $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$
- $x^7 + y^7 = (x+y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$

برای $n=2,4,6,\cdots$ (اعداد جفت)

$$5-\quad x^n+y^n=\left[x^{\frac{n}{2}}+y^{\frac{n}{2}}+\sqrt{2(xy)^{\frac{n}{2}}}\right]\left[x^{\frac{n}{2}}+y^{\frac{n}{2}}-\sqrt{2(xy)^{\frac{n}{2}}}\right]$$

- $x^2+y^2=\left(x+y+\sqrt{2xy}\right)\left(x+y-\sqrt{2xy}\right)$
- $x^4+y^4=\left(x^2+y^2+\sqrt{2}xy\right)\left(x^2+y^2-\sqrt{2}xy\right)$

$$6-\quad (a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$$(a-b)^2-(a+b)^2=-4ab$$

$$7-\quad (a+b)^2+(a-b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$$

$$(a-b)^2+(a+b)^2=2\left(a^2+b^2\right)$$

تجزیه افاده های الجبری: عبارت از دریافت عوامل ضربی یک افاده الجبری می باشد که قرار ذیل اند:

تجزیه نوع اول:

$$ax+ay=a(x+y)$$

تجزیه نوع دوم:

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

تجزیه نوع سوم:

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$
$$=(x+y)(x+y)$$

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$$
$$=(x-y)(x-y)$$

تجزیه نوع چهارم:

$$ax+ay+bx+by=(a+b)(x+y)$$

تجزیه نوع پنجم:

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

ویا $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

$x^2+(a-b)x-ab=(x+a)(x-b)$ ویا

$x^2+(b-a)x-ab=(x-a)(x+b)$ ویا

تجزیه نوع ششم:

$$ax^2+bx+c=\left(x-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

جذر: هرگاه یک طاقت به نما کسری قرار داشته در شکل افاده جذری چنین تعریف گردیده است.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

قوانین جذور:

1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

2) $\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[n]{a^q}=\sqrt[n]{a^{p+q}}$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}}=\sqrt[n\cdot m]{a^p}$

4) $\sqrt[n]{a^p}\cdot\sqrt[m]{a^q}=\sqrt[n\cdot m]{a^{pm+qn}}$

5) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

6) $\dfrac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{a^q}}=\sqrt[n]{a^{p-q}}$

7) $\dfrac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[m]{a^q}}=\sqrt[n\cdot m]{a^{pm-qn}}$

8) $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

سوالات

1. هرگاه $P(x)$ یک پولینوم باشد و
$P(x) = ax^6 + (a-b+3)x^{-3} + (a+b-9)x^{-2} + bx$ داده شده باشد پولینوم $P(x)$ عبارت است از:

1) $2x^6 + 3x$ 2) $3x^6 + 6x$ 3) $5x^6 + 4x$ 4) $2x^6 + 5x$

2. در پولینوم $P(x) = 3x^{n-2} + 5x^{2-n} + 9x$ قیمت $p(3)$ عبارت است از:

1) 30 2) 32 3) 35 4) 37

3. هرگاه $n \in Z^+$ و پولینوم $p(x) = 5(x-2)^{2n} - 7(2-x)^{2n-1}$ باشد قیمت $p(1)$ عبارت از:

1) -2 2) -1 3) 0 4) 1

4. هرگاه $P(x) = 3x^2 + 5x^3 - 4x$ و $Q(x) = 4x^2 + x^3 - 3x$ در این صورت $P(x) + Q(x)$ عبارت است از:

1) 5 2) 6 3) 3 4) 4

5. هرگاه پولینوم $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ تقسیم $(x+1)^2$ گردد باقیمانده آن عبارت است از:

1) $6x + 5$ 2) $10x + 3$ 3) $8x + 3$ 4) $10x + 6$

6. مجموعه ضرایب پولینوم $A = (3x-1)^6 + (4x-3)^{200}$ مساوی است به:

1) 65 2) 66 3) 67 4)

7. اگر $p(x) = Q(x)(x-a) + R(x)$ و $R(x) = 0$ باشد،پس برای جواب ذیل درست است:

1) $p(a) = Q(a) + a$ 2) $p(a) = Q(a)$

3) عامل ضربی $p(x)$ است 4) عامل ضربی $p(x)$ نیست

.8 اگر پولینوم $p(x) = 4x^2 - 7x$ بالای پولینوم $x - 2$ تقسیم شود، باقی مانده آن مساوی است به:

1) 4 2) 2 3) -2 4) -4

.9 هرگاه حدود $25x^{2n}y^{20}z^m$ و $\frac{1}{10}x^{10}y^{2m}z^{10}$ مشابه باشند، درینصورت مقادیر m و n عبارت است از:

1) $\begin{cases} m = 10 \\ n = -5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} m = -5 \\ n = -10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} m = 5 \\ n = 10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} m = 10 \\ n = 5 \end{cases}$

.10 باقیمانده $\frac{x^4+12x^2+8x+20}{x-2}$ مساوی است به:

1) -100 2) 100 3) 200 4) -200

.11 اگر $(x + 10)$ یک فکتور پولینوم $p(x)$ باشد، پس :

1) $p(-10) \neq 1$ 2) $p(-10) \neq 1$
3) $p(-10) = -1$ 4) $p(-10) = 0$

.12 اگر افاده $y^3 - 4y^2 + ky + 24$ بالای $(y - 2)$ تقسیم شود، و باقی مانده آن 8 باشد، پس قیمت k مساوی است به:

1) -6 2) -4 3) 4 4) 6

.13 اگر عرض مستطیل $(n - 3)$ و طول آن $(n + 2)$ باشد، پس مساحت آن مساوی است به:

1) $n^2 + n - 6$ 2) $n^2 + n + 6$ 3) $n^2 - n + 6$ 4) $n^2 - n - 6$

.14 اگر $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ و $g(1) = 4, g(-1) = 3$ باشد، قیمت های a و b مساوی است به:

1) $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

.15 اگر $(x - 10)$ یک فکتور پولینوم $p(x)$ باشد، پس کدام یک از روابط زیر درست است:

1) $\mathrm{p}(-10) = 0$ 2) $p(10) = 0$ 3) $p(-10) = 1$ 4) $p(1-) \neq 0$

16. به کدام قیمت k پولینوم $A = 2x^3 - kx^2 + 4$ با پولینوم $B = 2x^3 + 4x^2 + 4$ مساوی است:

1) $k = 4$ 2) $k = -4$ 3) $k = 2$ 4) $k = -2$

17. در پولینوم $p(x) = 10x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 10$ قیمت a_3 مساوی است به:

1) صفر 2) 4 3) 2 4) 10

18. اگر $p(x) = Q(x)(x-a)$ و $p(x) = 0$ باشد، در اینصورت $(x-a)$:

1) عامل ضربی $P(x)$ نیست 2) $p(a) = Q(a) + a$
3) $\mathrm{p(a) = Q(a) - a}$ 4) عامل ضربی $p(x)$ است

19. اگر پولینوم $p(x) = (x+1)^{100}$ بالای دو حده $x + 1$ تقسیم شود، باقیمانده آن برابر است به:

1) 10 2) 1 3) 100 4) 0

20. اگر $(x+5)$ یک فکتور پولینوم $P(x) = x^3 + kx + 125$ باشد، پس قیمت k عبارت است از:

1) $k = 2$ 2) $k = -1$ 3) $k = 0$ 4) $k = -2$

21. افاده الجبری $? = \dfrac{a^{n+2} - a^{2-n}}{a^{n+3} - a^{3-n}}$ عبارت است از:

1) a^{-n} 2) a^{n} 3) a^{2n-1} 4) $\dfrac{1}{a}$

22. حاصل افاده $? = \dfrac{0.000125 \cdot 10^{47} - 0.61 \cdot 10^{43}}{1.5 \cdot 10^{42} - 0.7 \cdot 10^{42}}$ عبارت است از:

1) 64 2) 32 3) 16 4) 8

23. مجموعه ضرایب پولینوم $p(x) = (x-3)^5 + 6(4-x)^3 + 7x$ مساوی است به:

1) 137 2) 135 3) 125 4) 127

24. اگر P یک عدد طبیعی باشد درجه پولینوم $A = 4x^{p-1} + 2x^{2p+4} - 5x^{p+1}$ مساوی است به:

1) $p+1$ 2) $2p+4$ 3) $p-1$ 4) $2p$

25. در پولینوم $p(x)=10x^4+4x^3+2x^2+10$ قیمت a_3 مساوی است به:

1) 10 2) 4 3) صفر 4) 2

26. اگر $A=4x^m y^4-6x^{n-1}y^4+y^8$ یک پولینوم متجانس باشد، قیمت های m و n مساوی است به:

1) $\begin{cases} m=6 \\ n=2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} m=4 \\ n=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} m=5 \\ n=4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} m=4 \\ n=5 \end{cases}$

27. حاصل ضرب $\left(\frac{a^p}{a^{-q}}\right)^{p-q}\cdot\left(\frac{a^q}{a^{-r}}\right)^{q-r}\cdot\left(\frac{a^r}{a^{-p}}\right)^{r-p}$ مساوی است به :

1) 1 2) -1

3) صفر 4) هر سه جواب درست است

28. اگر $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-100)$ باشد قیمت $f(0)$ عبارت از:

1) $99!$ 2) $100!$ 3) $-(100!)$ 4) $-(99!)$

29. اگر $(x^3-4x^2+3x)(x^2-5x+1)=\cdots\cdots+ax^4+\cdots\cdots$ باشد قیمت $a=?$ عبارت است از:

1) -10 2) -8 3) -9 4) -7

30. $P(x-2)=x^2+x-6$ باشد قیمت $P(x+2)=?$ عبارت است از:

1) x^2+7x+7 2) $x^2+9x+14$ 3) $x^2-9x-14$ 4) x^2+x-2

31. اگر $P(x-3)=2(x-3)^6-2x^2+6x-28$ انگاه مجموع ضرایب ضرایب پولینوم $P(x)$ عبارت است از:

1) -34 2) -32 3) -16 4) 16

.32 اگر $f(x) = 2^{3x}$ باشد در این صورت $f(x+3) = ?$ عبارت از:

1) $2^9 f(x)$ 2) $2^3 f(x)$ 3) $-2^3 f(x)$ 4) $-2^9 f(x)$

.33 هرگاه $P(2-3x) = -2x^7 + 5x^3 + 2x^2 + 8$ باشد , قیمت $P(5) = ?$ عبارت است از:

1) 3 2) 4 3) 5 4) 7

.34 اگر $Q(5x) = 125x^2 - 12$ باشد باقیمانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 3$ عبارت است از:

1) 36 2) 33 3) 30 4) 27

.35 اگر پولینوم $P(x) = x^{16} - 2 \cdot x^{11} + 6x^6 + 3$ بالای پولینوم $x^5 + 2$ تقسیم گردد باقیمانده عبارت است از:

1) $21x + 18$ 2) $-17x + 21$ 3) $4x + 9$ 4) $-28x + 3$

.36 هرگاه $b = 10, a = 20$ و $c = 15$ باشد , قیمت $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = ?$ عبارت است از:

1) 225 2) 25 3) 125 4) 75

.37 اگر $x - \frac{1}{x} = 3$ باشد قیمت $x^2 + \frac{1}{x^2}$ عبارت از:

1) 10 2) 11 3) 12 4) 13

.38 هرگاه $a + \frac{1}{a} = 3\sqrt{2}$ باشد , قیمت $a^2 + \frac{1}{a^2} = ?$ عبارت است از:

1) 9 2) 12 3) 16 4) 24

.39 اگر $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ باشد , قیمت $x + \frac{1}{x} = ?$ عبارت است از:

1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{6}$ 3) $2\sqrt{6}$ 4) $2\sqrt{7}$

.40 هرگاه $x=3\sqrt[3]{2}+1$ باشد , قیمت $x^3-3x^2+3x=?$ عبارت است از:

1) 27 2) 47 3) 55 4) 65

.41 افاده $\frac{(4y-24)^3+(2y-12)^3}{(y-6)^3}$ مساوی است به:

1) $\frac{72}{y-6}$ 2) -72

3) $72(y-6)^0$ 4) $72(y-6)$

.42 تجزیه افاده $a^4+a^2b^2+b^4$ عبارت است از:

1) $(a^2-b^2+ab)(a^2+b^2+ab)$

2) $(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

3) $(a^2-b^2+ab)(a^2-b^2-ab)$

4) $(a^2+b^2-ab)(a^2-b^2-ab)$

.43 در انکشاف بینوم ذیل $(x+5)^6=\cdots+Ax^4$ قیمت A عبارت از:

1) 125 2) 250 3) 350 4) 375

.44 هرگاه $A=a^3+b^3$ و $B=a^3-b^3$ باشد، درینصورت $A+B$ مساوی است به:

1) $-2b^3$ 2) $2a^3$ 3) $2b^3$ 4) $-2a^3$

.45 حاصل ضرب $(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$ مساوی است به:

1) $(x+y)^4$ 2) $(x-y)^4$ 3) x^4+y^4 4) x^4-y^4

.46 هرگاه $P(x)=x^3+8x^2+12x+6$ و $Q(x)=4x^2+x-4$ باشد، پس $P(x)+Q(1)$ مساوی است به:

1) x^3+8x^2+2x 2) $x^3+8x^2+12x+7$

3) $24x^3+8x+7$ 4) x^2+8x+7

.47 حاصل ضرب $(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$ مساوی است به:

1) x^3-y^3 2) x^5+y^5 3) x^5-y^5 4) $(x-y)^5$

.48 اگر $x+y=5$ و $x\cdot y=6$ باشد، پس x^3+y^3 مساوی است به:

1) 35 2) -35 3) -19 4) 20

.49 تجزیه افاده $a^4+a^2b^2+b^4$ عبارت است از:

1) $(a^2-b^2+ab)(a^2+b^2+ab)$

2) $(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

3) $(a^2-b^2+ab)(a^2-b^2-ab)$

4) $(a^2+b^2-ab)(a^2-b^2-ab)$

.50 انکشاف بینوم $(a+b)^2$ به کمک $\binom{n}{k}$ عبارت است از:

1) $(a+b)^2=\binom{2}{2}a^2+\binom{2}{0}ab+\binom{2}{1}b^2$

2) $(a+b)^2=\binom{2}{0}a^2+\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2$

3) $(a+b)^2=\binom{2}{3}a^2+\binom{2}{2}ab+\binom{2}{0}b^2$

4) $(a+b)^2=\binom{2}{0}a^2-\binom{2}{1}ab+\binom{2}{2}b^2$

.51 اگر $a+b=9$ و $a-b=15$ باشد پس قیمت a^2+b^2 مساوی است به:

1) 151 2) 152 3) 153 4) 154

.52 افاده $\frac{(4y-24)^3+(2y-12)^3}{(y-6)^3}$ مساوی است به:

1) $\frac{72}{y-6}$ 2) -72 3) $72(y-6)^0$ 4) $72(y-6)$

.53 $\frac{x^3}{x-1}\div\frac{2x^3}{x^2-1}$ مساوی است به:

1) $\frac{2}{x^2-1}$ 2) $\frac{2}{x+1}$ 3) $\frac{1}{x^3}$ 4) $\frac{2}{x-1}$

.54 حاصل $(a^5+b^5)\div(a+b)$ مساوی است به:

1) $a^4+b^4+a^2b^2$
2) $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$
3) $a^4+a^3b-ab^3+b^4$
4) $a^4+b^4+a^2b^2$

.55 جذور حقیقی پولینوم $f(x)=x+4x^2+4$ مساوی است به:

1) جذور حقیقی ندارد
2) $\sqrt{2}$
3) $\pm\sqrt{2}$
4) $-\sqrt{2}$

.56 خارج قسمت $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ مساوی است به:

1) 1
2) 2
3) $3i$
4) -2

.57 معکوس ضربی $\frac{1}{5}i+\frac{1}{5}$ مساوی است به:

1) $\frac{15}{6}-\frac{15}{6}i$
2) $\frac{1}{5}i-\frac{1}{5}$
3) $5-5i$
4) $5i-5$

.58 اگر $z_1=2+3x$ و $z_2=4+5x$ باشد،پس رابطه ذیل درست میباشد:

1) $|z_1|=|z_2|$
2) $z_1+z_2=z_2-z_1$
3) $z_1-z_2=z_2-z_1$
4) $z_1=2z_2$

.59 اگر $z=x+yi$ باشد،قیمت $|z-2|$ مساوی است به:

1) y^2
2) $\sqrt{x^2+y^2}$
3) x
4) $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

.60 هرگاه $z=3-3i$ باشد در این صورت $\overline{\overline{z}}$ مساوی است به:

1) $3+3i$
2) $-3+3$
3) $-3-3i$
4) $3-3i$

.61 اگر $z=5-i$ پس قیمت $|\,\overline{z}\,|$ مساوی است به:

1) $\sqrt{25}$
2) $\sqrt{26}$
3) $-\sqrt{25}$
4) $-\sqrt{26}$

.62 هرگاه $z_1=2-(m+3)i$ و $z_2=2n-4+3i$ با هم مساوی باشند، در این صورت مقادیر n,m مساوی است به:

1) $n=3,m=-6$
2) -$\mathrm{n}=2,\mathrm{m}=5$
3) $n=-3,m=6$
4) $n=3,m=6$

63. هرگاه $\bar{z}$ مزدوج عدد مختلط z باشد، در این صورت حاصل تفریق شان عبارت است از:

1)عدد مختلط صفری   2)عدد خالص موهومی

3) مربع عدد مختلط   4) عدد خالص حقیقی

64. اگر $z = 2 - 3i$ باشد، پس z^2 مساوی است به:

1) $-12\mathrm{i}$ 2) $-(5+12i)$ 3) $(5-12\mathrm{i})$ 4) $12i$

65. حاصل $\frac{i^{200}+i^{100}}{2\,i^{1000}}$ مساوی است به:

1) 1 2) $-i$ 3) -1 4) i

66. هرگاه $z = i + 2$ باشد، در این صورت $\frac{\bar{z}}{z+\bar{z}}$ مساوی است به:

1) $\frac{i-4}{4}$ 2- $\frac{(2i-1)}{2}$ 3) $\frac{2-i}{4}$ 4) $\frac{2+i}{2}$

فصل سوم

بخش معادلات

معادله الجبری: به مساوات الجبری گفته می شود که بنابر بعضی از قیمت های مجهول مربوط صدق نماید.

خواص معادله:

1) خاصیت انعکاسی $x \equiv x$

2) خاصیت تناظری $x = y \Leftrightarrow y = x$

3) خاصیت انتقالی $\left.\begin{matrix} x = y \\ y = z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = z$

4) اگر $x = y$ باشد ، پس

$$x + a = y + a$$
$$x - a = y - a$$

انواع معادلات الجبری: معادلات الجبری نظر به تعداد مجهول و درجه آن انواع مختلف دارند که بعضی آن ها قرار ذیل اند.

معادله یک مجهوله درجه اول: هرگاه a و b اعداد ثابت باشند (طوریکه $a \neq 0$) :

$$ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

معادلات قیمت مطلقه: در این نوع معادلات با استفاده تعریف قیمت مطلقه معادله را یکبار برای مثبت و بار دیگر منفی مطالعه می نماییم.

معادله دو مجهوله درجه اول: هرگاه b, a و c اعداد ثابت باشند (طوریکه $a,b \neq 0$) :

$$ax + by = c$$

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول (معادلات خطی):

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

توجه نمایید که گراف این نوع معادلات یک خط مستقیم می باشد.

مناقشه

1. هرگاه $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ باشد ، سیستم معادلات حل مشخص دارد . (خطوط مذکور در یک نقطه متقاطع اند)
2. هرگاه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ باشد ، سیستم معادلات حل مشخص ندارد.

- هرگاه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد ، سیستم معادلات هیچ حل ندارد. (خطوط مذکور با هم موازی اند).
- هرگاه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ باشد ، سیستم معادلات بی نهایت حل دارد. (خطوط مذکور با هم منطبق اند).

سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول:

هرگاه a ,b, c و d اعداد ثابت باشند ، سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول به طور عموم قرار ذیل تعریف گردیده است.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

حل سیستم معادلات دو مجهوله و سه مجهوله: می توان سیستم معادلات فوق الذکر را به طریقه های مساوی ساختن ضرایب (افنا) ، تعویض ، مساوات ، گراف ، متریکس و دیترمینانت حل نمود.

متریکس ها Matrixes: اشیاء اعداد و حروفی که به شکل سطری و ستونی به یک جدول مستطیلی ترتیب گردیده باشند متریکس نامیده می شود.

ترتیب متریکس: متریکسی که دارای m سطر و n ستون باشد متریکس $(m \times n)$ نامیده میشود. قابل یاد آوریست که متریکس $n\times m \neq m\times n$ است مانند متریکس های ذیل:

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow A_{2\times3}$$

$$B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}_{3\times2} \Rightarrow B_{3\times2}$$

انواع متریکس ها:

1) **متریکس سطری:** متریکس که تنها و تنها یک سطر داشته باشد ، متریکس سطری نامیده می شود مانند.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}_{1\times3}$$

2) **متریکس ستونی:** متریکس که تنها و تنها یک ستون داشته باشد ، متریکس ستونی نامیده می شود مانند.

$$A=\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1}$$

3) متریکس صفری: متریکس که تمام عناصر آن صفر ها باشد ، متریکس صفری یاد می گردد، مانند.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

4) متریکس مربعی: متریکس که سطر و ستونهای آن با هم مساوی باشد ، متریکس مربعی نامیده میشود. مانند.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

به خاطر داشته باشید که هر متریکس مربعی دارای دو قطر میباشد. یعنی در متریکس $A_{2\times 2}$ عناصر $(3,5)$ قطر اصلی ، عناصر $(2,-1)$ قطر فرعی نامیده می شوند.

5) متریکس قطری: متریکس که تمام عناصر آن به غیر از عناصر قطر اصلی صفر ها باشد مانند.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6) متریکس اسکالر: آن متریکس قطری که عناصر قطر اصلی آن با هم مساوی باشند. مانند.

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

7) متریکس واحد: متریکس اسکالر که عناصر قطر اصلی آن عدد یک باشند مانند.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{2\times 2}$$

8) متریکس متقابل (متضاد): متریکس که دارای عین سطر و ستون اما عناصر آن متضاد همدیگر باشند مانند.

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\\ -7 & -2\end{pmatrix}_{3\times 2} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-5 & +1\\ -2 & -3\\ +7 & +2\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

عملیات بالای متریکس ها

1) جمع و تفریق متریکس ها: متریکس های که دارای ترتیب های مساوی باشند با هم جمع یا تفریق میگردند طوریکه هر یک از عناصر همان سطر و ستون با هم جمع و تفریق میگردد.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$
$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=C_{m\times n}$$

2) ضرب اسکالر با متریکس: هرگاه $K\in IR$ یک اسکالر را با هر یک از عناصر یک متریکس ضرب نماییم ضرب اسکالر با متریکس میباشد. مثلاً

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}_{2\times 2}\Rightarrow KA=\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

3) ضرب دو متریکس: حاصل ضرب دو متریکس یک متریکس بوده به شرط که تعداد عناصر ستونهای متریکس اول مساوی به تعداد عناصر سطر های متریکس دوم باشد. یعنی:

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

ترتیب اجرا عملیه ضرب طوریست که سطر اول متریکس اول را به تمام عناصر ستون های متریکس دوم به نوبت ضرب نموده و با هم جمع می نمایم و به حیث سطر متریکس حاصل ضرب قرار میدهیم و این عملیه را تا اخیر ادامه میدهیم. به خاطر داشته باشید عملیه ضرب متریکس ها خاصیت تبدیلی ندارد.

ترانسپوز متریکس Transpose of Matrix: هرگاه سطر و ستون یک متریکس تبدیل گردد متریکس $A_{m\times n}$ به متریکس ترانسپوز متریکس $A^T{}_{n\times m}$ تبدیل می گردد . در نتیجه هرگاه یک متریکس به متریکس ترانسپوز مساوی باشند به نام متریکس متناظر یاد میگردد.

به خاطر داشته باشید که ترانسپوز یک متریکس خواص ذیل را دارا می باشد.

1) $\left(A^T\right)^T=A$

2) $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$

3) $(A\cdot B)^T=\pm B^T\cdot A^T$, $(\alpha\cdot B)^T=\alpha\cdot A^T$

4) $(-A)^T=-A^T$

متوصلهٔ متریکس Adjoint Matrix: متریکس مربعی که جای عناصر قطر اساسی آن تبدیل و اشاره قطر فرعی آن تغییر نماید ، متریکس حاصله را متوصلهٔ یک متریکس مینامند. یعنی:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

معکوس ضربی یک متریکس: هرگاه حاصل ضرب دو متریکس مربعی یک متریکس واحد گردد متریکس یکدیگر نامیده می شوند.

طوریکه $A\cdot A^{-1}=I$

که متریکس معکوس به اساس رابطه $A^{-1}=\dfrac{AdjA}{|A|}$ به دست میآید طوریکه $|A|\neq 0$ ، دیترمینانت یک متریکس نامیده می شود. همچنان اگر $|A|=0$ متریکس مربعی مذکور منفرد و $|A|\neq 0$ باشد ، غیر منفرد یاد می گردد.

دیترمینانت 2×2**:** به ترتیب اعدادی گفته می شود که دارای دو سطر و دو ستون باشد و همچنان دارای یک قطر اصلی a_1 ، b_2 و یک قطر فرعی a_2 ، b_1 می باشد که قیمت این دیترمینانت عبارت است از:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

دیترمینانت 3×3 **:** به ترتیب اعدادی گفته می شود که دارای سه سطر و سه ستون بوده و همچنان دارای سه قطر اصلی و سه قطر فرعی می باشد که قیمت آن عبارت از:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - \left(a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1\right)$$

هرگاه A یک متریکس $m\times n$ باشد برای $|A|$ خواص ذیل را در نظر داشته باشید:

1) هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون صفر باشد ، پس $|A|=0$

2) هرگاه دو سطر یا دو ستون یکسان یا متناسب باشند ، پس $|A|=0$

3) یک دیترمینانت با ترانسپوز خود مساوی است. یعنی $|A|=|A^T|$

حل سیستم معادلات دو مجهوله به طریقه دیترمینانت: با در نظر داشت تعریف سه دیترمینانت Δ , Δx , Δy می توان قیمت مجهول x و y را قرار فورمول های ذیل دریافت نمود. و در صورتیکه $\Delta = 0$ باشد سیستم معادلات حل ندارد.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{array}\right\} x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

حل سیستم معادلات سه مجهوله به طریقه دیترمینانت: با در نظر داشت تعریف چهار دیترمینانت Δ , Δx , Δy , Δz می توان قیمت مجهول x, y و z را قرار فورمول های ذیل دریافت نمود.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{array}\right\} x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad , \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

اگر $\Delta = 0$ باشد سیستم معادلات حل ندارد.

معادلات نمائی: به معادله گفته می شود که مجهول در نما (طاقت نما) قرار داشته باشد گرچه به طور عموم می توان چنین معادلات را به کمک لوگارتم حل نمود اما می توان به طور خاص معادلات که در اطراف مساوات قاعده ها با هم مساوی باشد پس طاقت نما ها نیز مساوی است ، استفاده نموده به حل این گونه معادلات می پردازیم.

معادلات عبارتی یا فکری: به معادلاتی گفته می شود که رابطه بین معلوم و مجهول به شکل جملات غیر الجبری ارائه گردیده باشد که می توان با استعمال حروف و درک مجهول اصلی مسایل مذکور را در شکل افاده های الجبری ارائه نموده و از طریق مساوات به حل آنها اقدام نمود.

به خاطر داشته باشید که برای ارائه اعداد در شکل افاده های الجبری می توان چنین نوشت.

1) اعداد مسلسل طبیعی

$1,2,3,4,5,\dots,n$

عدد اول x , عدد دوم $x+1$, عدد سوم $x+2$, ...

2) اعداد مسلسل طبیعی جفت

$2,4,6,8,\dots,2n$

عدد اول $2x$, عدد دوم $2x+2$, عدد سوم $2x+4$, ...

3) اعداد مسلسل طبیعی طاق

$1,3,5,7,\dots,2n+1$

عدد اول $2x+1$, عدد دوم $2x+3$, عدد سوم $2x+5$, ...

4) اعداد از نظر طبقه بندی : در حالیکه y, x و z . . . ارقام را ارائه نماید .

x عدد یک رقمی , $10y+x$ عدد دو رقمی , $100z+10y+x$ عدد سه رقمی , ...

معادلات یک مجهوله درجه دوم: درحالیکه c, b ، $a \neq 0$ اعداد ثابت اند ، شکل عمومی معادلات فوق عبارت از : $ax^2+bx+c=0$ بوده که می توان معادلات فوق را به طریقه تجزیه و یا به کمک فورمول محمد بن موسی قرار روابط ذیل حل نمود.

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مناقشه

1) اگر $\Delta > 0$ باشد ، معادله دو جذر حقیقی مختلف $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ دارد.

2) اگر $\Delta = 0$ باشد ، معادله دو جذر حقیقی مساوی $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ دارد.

3) اگر $\Delta < 0$ باشد ، معادله جذر حقیقی ندارد. (دو جذر موهومی دارد)

رابطه بین جذور معادله درجه دوم از جنس ضرایب آن:

1) حاصل جمع جذور $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$

2) حاصل ضرب جذور $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

3) حاصل تفریق جذور $x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{a}$

4) حاصل جمع معکوس جذور $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = -\dfrac{b}{c}$

5) معکوس حاصل جمع جذور $\dfrac{1}{x_1 + x_2} = -\dfrac{a}{b}$

6) معکوس حاصل ضرب جذور $\dfrac{1}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{a}{c}$

7) حاصل جمع مربعات جذور $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = S^2 - 2P$

8) حاصل جمع مکعبات جذور $x_1^{\,3} + x_2^{\,3} = S^3 - 3PS$

تشکیل معادله درجه دوم: در صورت x_1 و x_2 جذور معادله یا حاصل جمع جذور S و حاصل ضرب جذور P موجود باشد ، میتوان معادله درجه دوم را چنین تشکیل نمود.

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$
$$x^2-Sx+P=0$$
$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

یادداشت

1) معادله درجه دوم که جذور آن m چند جذور معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد عبارت است از:

$$ax^2+bmx+cm^2=0$$

2) معادله درجه دوم که جذور آن معکوس جذور معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد عبارت است از:

$$cx^2+bx+a=0$$

3) معادله درجه دوم که جذور آن مختلف الاشاره جذور معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد ،عبارت است از:

$$ax^2-bx+c=0$$

تعیین اشاره جذور معادلات درجه دوم

1) روش دیکارت: در صورتیکه $\Delta\geq 0$ باشد.

- هرگاه بین حدود معادله هیچ تحول علامه نباشد ، معادله دو جذر هم علامه منفی دارد.
- هرگاه بین حدود معادله یک تحول علامه باشد ، معادله دو جذر مختلف العلامه دارد.
- هرگاه بین حدود معادله دو تحول علامه باشد ، معادله دو جذر هم علامه مثبت دارد.

2) روش نسبت ضرایب: در صورتیکه $\Delta\geq 0$ باشد.

1) $\frac{c}{a}<0$ دو جذر مختلف العلامه دارد در این صورت :

- $-\frac{b}{a}>0$ جذر بزرگ مثبت و جذر کوچک منفی
- $-\frac{b}{a}<0$ جذر بزرگ منفی و جذر کوچک مثبت
- $-\frac{b}{a}=0$ دو جذر مساوی مختلف العلامه

2) $\frac{c}{a} > 0$ دو جذر هم علامه دارد در این صورت:

- $-\frac{b}{a} > 0$ دو جذر هم علامه مثبت
- $-\frac{b}{a} < 0$ دو جذر هم علامه منفی

3) $\frac{c}{a} = 0$ ، $x_1 = 0$ و $x_2 = \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 & \text{جذر دوم مثبت است} \\ -\frac{b}{a} < 0 & \text{جذر دوم منفی است} \end{cases}$

معادلات پارامتریک یک مجهوله درجه دوم

به معادلات گفته می شود که بر علاوه مجهول مربوط در آن یک یا چند حرف اضافی دیگر که قیمتهای عددی آن تعیین نگردیده ، موجود باشد ، مانند.

$$(2m+1)x^2 - 3mx + 2 = 0$$

که در معادله فوق m پارامتر نامیده می شود و میتوان با استفاده از شرطی که در سوال مطرح گردیده و در مسایل مربوط معادلات درجه دوم راجع به آنها معلومات داریم به حل آن اقدام نمود.

اعداد موهومی

طوریکه میدانیم معادلات مانند $x^2 + 49 = 0$ در ساحه اعداد حقیقی دارای حل نمیباشد. یعنی $x = \sqrt{-49}$ میگردد ، بناً این گونه اعداد را موهومی مینامند. پس به طور عموم عدد a_i یک عدد موهومی است اگر $a \in IR$ و $i = \sqrt{-1}$ واحد اعداد موهومی باشد مثلاً

$$\sqrt{-49} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{-1} = \pm 7i$$

به خاطر داشته باشید که:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -\sqrt{-1} \\ i^4 &= +1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

و همچنان اعداد موهومی قابلیت اجرای عملیات اساسی را دارا میباشد.

اعداد مختلط

مجموعه الجبری اعداد حقیقی و موهومی را اعداد مختلط مینامند. طوریکه :

$$C=\{z/z=a+bi \quad a,b\in IR \text{ و } i=\sqrt{-1}\}$$

بخاطر داشته باشید که اگر $Z=a+bi$ یک عدد مختلط باشد مزدوج آن $\overline{Z}=a-bi$ می باشد.

به همین ترتیب معکوس ضربی $Z=a+bi$ عبارت از $Z^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{bi}{a^2+b^2}$ می باشد.

مطالعه اشاره بینوم ها ، ترینوم ها و ساحه حل نامساوات ها

تعیین اشاره بینوم ها

شکل عمومی بینوم $y=ax+b$ بوده که به قیمت $x=-\frac{b}{a}$ بی اشاره گردیده و هدف اینست که بینوم مذکور به کدام قیمت های x دارای اشاره مثبت و به کدام قیمت های x دارای اشاره مثبت میباشد، برای این منظور دو حالت ذیل وجود دارد.

حالت اول

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y=ax+b$		$-$	0	$+$

حالت دوم

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$y=ax+b$		$+$	0	$-$

تعیین اشاره ترینوم ها

شکل عمومی ترینوم های درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ بوده و هدف اینست که ترینوم مذکور به کدام قیمت های x دارای اشاره مثبت و به کدام قیمت های x دارای اشاره منفی میباشد. بناً برای این منظور با تشکیل Δ سه حالت ذیل وجود دارد:

1) هرگاه $\Delta< 0$ باشد ترینوم اشاره a را دارا است یعنی:

- اگر $a > 0$ باشد ترینوم به تمام قیمت های x اشاره مثبت دارد.
- اگر $a < 0$ باشد ترینوم به تمام قیمت های x اشاره منفی دارد.

2) هرگاه $\Delta= 0$ باشد به جز از قیمت $x = -\frac{b}{2a}$ که در آن بی اشاره می گردد ، به سایر قیمت های x ترینوم اشاره a را دارا می باشد. یعنی:

- اگر $a > 0$ باشد ترینوم به جز از $x = -\frac{b}{2a}$ به تمام قیمت های x اشاره مثبت دارد.
- اگر $a < 0$ باشد ترینوم به جز از $x = -\frac{b}{2a}$ به تمام قیمت های x اشاره منفی دارد.

3) هرگاه $\Delta> 0$ باشد ترینوم به جز از جذور خویش یعنی x_1 و x_2 که در آن بی اشاره می گردد به سایر قیمت های x نظر به اشاره a می توان دریافت نمود که داخل جذور خلاف اشاره a و خارج جذور هم اشاره a می باشد. یعنی :

- هرگاه $a > 0$ باشد ، داخل جذور اشاره منفی و خارج جذور اشاره مثبت دارد.
- هرگاه $a < 0$ باشد ، داخل جذور اشاره مثبت و خارج جذور اشاره منفی دارد.

نامساوات

هرگاه aو b دومقدار یا کمیت را ارائه نماید ، افادۀ $a > b$ یا $a < b$ را نامساوات یا غیر تساوی می نامند.

خواص نامساوات:

1) هرگاه $a > b$ یا $a < b$ بوده $n \in IR$ را در داشته باشیم ، پس خواهیم داشت:

$a<b$	$a>b$
$a+n<b+n$	$a+n>b+n$

2) هرگاه $a > b$ یا $a < b$ بوده و $n > 0$ باشد.

$$a < b \qquad a > b$$
$$a \cdot n < b \cdot n \qquad a \cdot n > b \cdot n$$
$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n} \qquad \frac{a}{n} > \frac{b}{n}$$

3) هرگاه $a > b$ یا $a < b$ بوده و $n < 0$ باشد.

$$a > b \qquad a > b$$
$$a \cdot n < b \cdot n \qquad a \cdot n < b \cdot n$$
$$\frac{a}{n} < \frac{b}{n} \qquad \frac{a}{n} < \frac{b}{n}$$

4) در صورتیکه $a > b$ باشد پس $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ خواهد بود ، همچنان هرگاه $a < b$ باشد ، پس $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ خواهد بود.

انواع نامساوی ها: بطور عموم نامساوی ها را در سه حالت ذیل مطالعه می نماییم.

1) ساحه حل نامساوی های یک مجهوله درجه اول

شکل عمومی نامساوی یک مجهوله درجه اول $ax + b > 0$ یا $ax + b < 0$ بوده که با استفاده از خواص نامساوی های می توان انتروال حل آنها را روی خط اعداد تعیین نمود.

2) ساحه حل نامساوی های دو مجهوله درجه اول

طوریکه می دانیم معادله $ax + by = c$ روی سیستم کمیات وضعیه قایم یک خط مستقیم را ترسیم می نماید بناً ساحه حل نامساوی دو مجهوله درجه اول عبارت از بی نهایت جوره مرتب (x, y) بوده که بناً بر آن یک جهت ساحه خط مستقیم که روی سیستم کمیات قرار دارد ، را صدق نماید که این امر برای سیستم نامساوی های دو مجهوله درجه اول نیز قابل تطبیق می باشد.

3) ساحه حل نامساوی های درجه دوم

شکل عمومی نامساوی های درجه دوم $ax^2 + bx + c > 0$ بوده جهت دریافت ساحه حل نامساوی مذکور به تشکیل Δ میتوان سه حالت ذیل را در نظر داشت.

- $\Delta > 0$ ، جذور x_1 و x_2 را دریافته. علامه a و اشاره نامساوی مطالعه میگردد
  - مخالف – در داخل جذور حل دارد
  - موافق – در خارج جذور حل دارد.
- $\Delta = 0$ ، به استثنای $x = -\frac{b}{2a}$. علامه a و اشاره نامساوی مطالعه میگردد
  - مخالف – به هیچ قیمت x حل ندارد.
  - موافق – به تمام قیمت های x حل دارد..
- $\Delta < 0$ ، علامه a و اشاره نامساوی مطالعه میگردد
  - مخالف – به هیچ قیمت x حل ندارد.
  - موافق – به تمام قیمت های x حل دارد.

سوالات

1. در معادله $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}\cdot\dots\cdot\sqrt{n}=2\sqrt{30}$ قیمت n عبارت است از:

1) 2　2) 3　3) 5　4) 8

2. سیستم مساوات دو مجهوله $\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=3\\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=\frac{8}{3}\end{cases}$ چند حل دارد:

1) یک حل　2) دو حل
3) بی نهایت　4) حل ندارد

3. در سیستم معادلات $\begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{4}{y}=11\\ \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=24\end{cases}$ مقدار $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}$ عبارت است از:

1) 5　2) 6　3) 7　4) 8

4. حل سیستم سه معادله و سه مجهوله $\begin{cases}2x-3y+z=1\\ 3x+y+z=12\\ x-y+2z=3\end{cases}$ عبارت از:

1) $\begin{cases}x=3\\ y=2\\ z=1\end{cases}$　2) $\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=1\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=2\end{cases}$　4) $\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

.5 سیستم معادلات $\begin{cases} x-2y+5z=3 \\ x+4y+5z=1 \\ 3x-6y+15z=2 \end{cases}$ چند حل دارد؟

1) یک حل
2) دو حل
3) حل ندارد
4) بی نهایت حل

.6 اگر دیترمینانت ضرایب معادلات خطی سه مجهوله $\Delta=3$ و دیترمینانت مجهول های آنها $N_x=12$, $N_y=-15$ و $N_z=-11$ باشد پس:

1) $(12,-15,-11)$
2) $\left(-5,4,-\frac{11}{3}\right)$
3) $\left(4,-5,-\frac{11}{3}\right)$
4) $\left(4,-5,\frac{11}{3}\right)$

.7 اگر $B=\begin{pmatrix} 3x & 2 \\ 5x & 6 \end{pmatrix}$ باشد، پس B^{-1} باری کدام قیمت x تعریف نشده است:

1) $x=0$
2) $x=8$
3) $x=2$
4) $x=1$

.8 اگر $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times4}=(3i-5j)_{4\times4}$ یک متریکس باشد، پس مجموعه سطر اول این متریکس عبارت از:

1) 71
2) -36
3) -38
4) 38

.9 اگر $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ باشد، پس $(B\cdot A)^T$ مساوی است به:

1) $\begin{pmatrix} 29 & 9 \\ 26 & 10 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 29 & 26 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}26 & 19\\10 & 9\end{pmatrix}$ (3

$\begin{pmatrix}26 & 10\\29 & 9\end{pmatrix}$ (4

.10 کدام یک از متریکس های ذیل یک متریکس متناظر است:

$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 5 & 6\\4 & 6 & 1\end{pmatrix}$(1

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 4\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$(2

$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\2 & -1 & 4\\5 & 4 & 6\end{pmatrix}$ (3

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\-1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ (4

.11 اگر $A=\begin{pmatrix}a & 3\\3 & a\end{pmatrix}$ و $\det(A)=0$ باشد، پس قیمت a مساوی است به:

$a=\pm 2$(1

$a=\pm 3$ (2

$a=\pm 9$ (3

$a=\pm\frac{1}{3}$ (4

.12 در متریکس $A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{7}\\8 & 10 & 13\\x & \sqrt{20} & \sqrt{28}\end{bmatrix}$ قیمت x را طوری تعیین کنید که متریکس A معکوس پذیر نباشد:

$x=10$ (1

$x=\sqrt{5}$ (2

$x=\sqrt{7}$ (3

$x=\sqrt{8}$ (4

.13 اگر $A=\begin{bmatrix}8 & 2 & 8\\1 & 5 & 1\\9 & 6 & 9\end{bmatrix}$ باشد، پس $|A|$ مساوی است به:

9 (1 9 (2 0 (3 −9 (4

14. متریکس $A = \begin{pmatrix} 10 & 2x \\ 2 & 4x+1 \end{pmatrix}$ برای کدام قیمت x متریکس منفرد است:

1) $x = \frac{5}{18}$
2) $x = \frac{18}{5}$
3) $x = -\frac{18}{5}$
4) $x = -\frac{5}{18}$

15. اگر $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ باشد، پس کدام یکی از روابط ذیل درست است:

1) $|A| = -|B|$
2) $|A| = 3|B|$
3) $|A|^3 = |B|^3$
4) $|A| = 4|B|$

16. اگر مرتبه مریکس A، 5×1 و متریکس B، 4×5 باشد، پس مرتبه متریکس $A \cdot B$ مساوی است به:

1) 1×4
2) 1×5
3) 4×1
4) 5×1

17. کدام یک از متریکس های زیر یک متریکس مربعی است:

1) $A = (a_{ij})_{3\times5}$
2) $A = (a_{ij})_{5\times7}$
3) $A = (a_{ij})_{k\times k}$
4) $A = (a_{ij})_{3\times9}$

18. اگر A یک متریکس باشد، پس بین $|A|$ و $|A^T|$ کدام یکی از رابطه های ذیل وجود دارد:

1) $|A^T| > |A|$
2) $|A^T| = -|A|$

3) $|A^T| < |A|$ 4) $|A^T| = |A|$

.19 اگر $A = \begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ باشند، پس $A + B$ مساوی است به:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) هیچکدام

.20 اگر $A_{m\times n}$ یک متریکس واحد باشد، پس کدام یک از گزینه های ذیل درست است:

1) $I = \begin{cases} 1, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}$ 2) $I = \begin{cases} 0, i \neq j \\ -1, i = j \end{cases}$

3) $I = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$ 4) $I = \begin{cases} 2, i \neq j \\ 0, i = j \end{cases}$

.21 دیترمینات متریکس $A = \begin{pmatrix} 5 & \cos^2 x \\ -5 & \sin^2 x \end{pmatrix}$ مساوی است به:

1) 5 2) 11

3) $5 \sin 2x$ 4) $-5 \cos 2x$

.22 اگر $A = \begin{pmatrix} \ln 2 & \ln 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ باشد، پس $200|A|$ مساوی است به:

1) 3 2) $2 \ln 200$

3) 0 4) $200 \ln 3$

.23 هرگاه B, A دو متریکس مربعی باشند، پس $|AB| = 1$ است، اگر:

1) هردو متریکس های منفرد باشند
2) هر دو متریکس متناظر باشند
3) یک متریکس معکوس متریکس دیگری باشد
4) هر دو متریکس های غیر منفرد باشند

.24 اگر $A=\left(a_{ij}\right)_{2\times3}=\left(i\right)_{2\times3}$ باشد ، پس متریکس A مساوی است به:

1) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$
2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$
3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
4) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

.25 کدام یکی از متریکس های ذیل یک متریکس متناظر است:

1) $\begin{bmatrix}8 & 9\\ 9 & 8\end{bmatrix}$
2) $\begin{bmatrix}5 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}$
3) $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 1\end{bmatrix}$
4) $\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

.26 اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 5 & 10\end{bmatrix}$ باشد، درینصورت $|A|$ عبارت است از:

1) 25
2) 5
3) 10
4) 21

.27 اگر $A=\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-3\\4\\-2\end{bmatrix}$ باشد، پس $A-B$ مساوی است به:

1) $\begin{bmatrix}6\\0\\4\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}-6\\0\\4\end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix}4\\0\\6\end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix}6\\0\\-4\end{bmatrix}$

.28 اگر $A=\begin{bmatrix}3\\-1\\4\end{bmatrix}$ باشد، پس A^T مساوی است به:

1) $\begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}3 & -1 & 4\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix}4 & 3 & -1\end{bmatrix}$

.29 متریکس ضریب های سیستم $\begin{cases}3x-y=4\\x+y=7\end{cases}$ عبارت است از:

1) $\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & 7\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 1\end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix}3 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix}1 & 1\\3 & -1\end{bmatrix}$

.30 اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}11\\3\\7\end{bmatrix}$ باشد، پس مرتبه $A\cdot B$ مساوی است به:

1) 3×3 2) 2×2 3) 1×1 4) 1×3

.31 اگر $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \left(\left(3A\right)^T\right)^T$ باشد، پس $\left(3A\right)^T$ مساوی است به:

1) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
2) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
3) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

.32 اگر $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، پس A^{-1} مساوی است به:

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$
2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -19 & 10 \end{bmatrix}$
3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -19 & 10 \end{bmatrix}$
4) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$

.33 متریکس معکوس $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ عبارت است از:

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$
3) هیچکدام
4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

.34 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درینصورت کدام یکی از رابطه های ذیل درست است:

1) $|A| = 2|B|$ 2) $|A| = |B|$

3) $|A| = -|B|$ 4) $|A|^2 = |B|^2$

35. ست عناصر ستون چهارم متریکس $B = (b_{ij})_{3\times4} = (2i)_{3\times4}$ عبارت است از:

1) $\{2,-4,6\}$ 2) $\{2,4,6\}$

3) $\{-2,4,6\}$ 4) $\{2,4,-6\}$

36. اگر $(a_{ij})_{3\times3} = (i+j)_{3\times3}$ باشد، پس متریکس A مساویست به:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ 2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ 4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

37. کدام یک از متریکس های زیر یک متریکس غیر منفرد است:

1) $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ 4) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

38. در متریکس $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 8 & 10 & 13 \\ x & \sqrt{20} & \sqrt{28} \end{bmatrix}$ قیمت x را طوری تعیین کنید که متریکس A معکوس پذیر نباشد:

1) $x = 10$ (2 $x = \sqrt{5}$

3) $x = \sqrt{7}$ (4 $x = \sqrt{8}$

.39 اگر $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 20 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ باشد، پس $\left|\frac{1}{18}200(A^T)^T\right|$ مساوی است به:

1) $\cos 90°$ (2 $\frac{1820}{18}$ (3 $\frac{1720}{18}$ (4 $\frac{1819}{18}$

.40 هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد قیمت A^{18} عبارت از:

1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2 $\begin{bmatrix} 1 & -72 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & -54 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4 $\begin{bmatrix} 1 & -32 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

.41 در متریکس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ قیمت M_{21} عبارت است از:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (2 $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (4 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

.42 در افاده جذری $\sqrt{3} = \sqrt[x+1]{\sqrt[x-1]{81}}$ قیمت x عبارت است از:

1) 2 (2 3 (3 4 (4 5

.43 در معادله $5^{-x-2} = 125$ قیمت x مساوی است به:

1) -4 (2 -5 (3 5 (4 4

.44 در معادله $8^{x+2} = 16^{x-1}$ قیمت x مساوی است به:

1) $x = 12$ 2) $x = 10$ 3) $x = 11$ 4) $x = 8$

.45 اگر یک عدد x و دیگری $x - 20$ باشد، پس قیمت x باید چند باشد تا که $x(20 - x)$ بزرگترین قیمت را داشته باشد:

1) $x = 10$ 2) $x = 9$ 3) $x = 5$ 4) $x = 8$

.46 در معادله $2^{x+1} = 8$ مساوی است به:

1) 2 2) 5 3) 3 4) -2

.47 قیمت x در معادله $\sqrt[3]{2^{x-1}} - 2 = 0$ مساوی است به:

1) 3 2) 4 3) 2 4) 5

.48 در معادله $2^{x} + 2^{x+1} - m \cdot 2^{x+2} = 0$ قیمت m مساوی است به:

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{8}$

.49 جذر معادله $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)^{x} = \frac{1}{8}$ عبارت از:

1) $x = 15$ 2) $x = 10$

3) $x = -10$ 4) $x = -15$

.50 قیمت x در معادله $\frac{3\cdot 2^{x-1}-3\cdot 2^{x}+2^{x+1}}{2^{x}}=2^{x-1}$ عبارت از:

1) -1 2) 0 3) 1 4) 2

.51 در معادله $\left(\frac{0.06}{0.03}\right)^{x+1}=\left(\frac{0.00048}{0.00012}\right)^{x-2}$ قیمت x عبارت از:

1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

.52 در معادله $3^{12}=15^{12}.625^{x}$ قیمت x عبارت از:

1) $x=-6$ 2) $x=-5$

3) $x=-3$ 4) $x=3$

.53 قیمت x در معادله $3=2\left(\frac{1}{x}-1\right)^{2}+5\left(\frac{1}{x}-1\right)$ عبارت از:

1) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}$ 2) $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}$

3) $\left\{\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right\}$ 4) $\{1,-1\}$

.54 اگر متریکس های ضرایب، ثوابت و مجهولات باالترتیب $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ ، $C=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ باشد، پس سیستم مذکور عبارت است از:

1) $\begin{cases}x+2y=-1\\3x-4y=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y=-1\\3x+4y=2\end{cases}$

3) $\begin{cases}x-2y=-1\\3x+4y=2\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-2y=-1\\3x+4y=2\end{cases}$

55. جذور معادله $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ عبارت است از:

1) $x=\pm 3\,, x=\pm 4$ 2) $x=\pm 4\,, x=\pm 2$

3) $x=\pm 2\,, x=\pm 4$ 4) $x=\pm 3\,, x=+2\,, x=-4$

56. حاصل جمع جذور معادله $\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+5=2x^2+\frac{2}{x^2}$ عبارت است از:

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) 1 4) 0

57. قیمت B در کسرهای $\frac{1}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{2}$ 2) -2 3) 2 4) $-\frac{1}{2}$

58. قیمت B در تجزیه کسور قسمی $\frac{x-3}{9x^2-1}=\frac{A}{3x-1}+\frac{B}{3x+1}$ عبارت است از:

1) $\frac{4}{3}$ 2) $-\frac{5}{3}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{4}{3}$

59. قیمت n در معادله $15=\frac{n!(n-2)}{n}:\frac{n!(n-2)!}{(n-3)!}$ مساوی است به:

1) 1 2) 12 3) 15 4) 17

60. اگر $x_1=\frac{1}{2}$ و $x_2=-\frac{3}{2}$ جذور معادله باشند معادله مذکور عبارت است از ؟

1) $4x^2+4x-3=0$ 2) $4x^2-4x-3=0$

3) $4x^2+4x+3=0$ 4) $4x^2-4x+3=0$

.61 هرگاه $f(x)=x^{10}+1$ باشد، پس $f(i)$ مساوی است به:

1) 0 2) 1 3) -1 4) i

.62 افاده $y = x^2 - 2x + 4$ برای کدام قیمت های x دارای اشاره مثبت است؟

1) $x > 0$ 2) $x < 0$

3) $2 < x < 1$ 4) تمام اعداد حقیقی

.63 کدام یک از قیمت های x سیستم نامساوات $\left|1-\frac{1}{x}\right| \le 1$ را صدق می نماید:

1) $x \ge \frac{1}{2}$ 2) $x \le \frac{1}{2}$

3) $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ 4) حل ندارد

.64 حاصل جمع جذور تام نامساوات $\begin{cases} |x+2| < 4 \\ |x-1| > 3 \end{cases}$ عبارت است از:

1) 6 2) 7 3) -9 4) -12

.65 ست حل غیرمساوات $(2x-8)(3x-12) \ge 0$ عبارت است از:

1) $2 < x \le 3$ 2) $8 < x < 12$

3) $-\infty < x < +\infty$ 4) $x > 8$

.66 کدام یکی از نقاط ذیل ، نامساوات دو مجهوله $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ x + y < 0 \end{cases}$ را صدق می کند؟

1) $(0,-3)$ 2) $(6,5)$ 3) $(0,5)$ 4) $(4,5)$

.67 ست حل غیر مساوات $4x^2 - 5x + 8 > 3x^2 + x$ عبارت است از:

1) $(-\infty,-2) \cup (4,\infty)$ 2) $(-\infty,4) \cup (2,+\infty)$

3) $(-\infty,2) \cup (4,+\infty)$ 4) $3 < x < 4$

.68 ست حل نامساوات $(3-x)^2(x^2+3x+7) \geq 0$ عبارت است از:

1) $(-5,\infty)$ 2) $[-7,-4) \cup [3,4)$ 3) $(-7,-4) \cup (3,4)$ 4) IR

.69 حل نامساوات $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x+2}$ عبارت است از:

1) $x = \frac{2+\sqrt{5}}{2}$ 2) $-1 < x < 1$

3) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 4) $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$

.70 اگر $z = x + yi$ باشد، پس قیمت $|z-2|$ مساوی است به:

1) x 2) $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

3) y^2 4) $\sqrt{x^2 + y^2}$

.71 حل های معادله $x^2+3ix-2=0$ عبارت است از:

1) $\begin{cases} x_1=i \\ x_2=2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1=i \\ x_2=-2i \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1=-i \\ x_2=-2i \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1=-i \\ x_2=2i \end{cases}$

.72 اگر $m\in Z$ باشد ، حاصل جمع جذور معادله $\frac{|2m-1|-9}{|m-3|}<0$ عبارت است از:

1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

.73 ست حل نامساوی $|x+3|<|x-2|$ عبارت است از:

1) $(-\infty,-1)$

2) $(-1,1)$

3) $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$

4) $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

.74 حل نامساوات $x<|x^2-4x|$ عبارت است از:

1) $0<x<3$

2) $2<x<3$

3) $3<x<5$

4) $0<x<5$

.75 هرگاه $x\in Z$ و $0<\frac{(x^3+1)(x^2-4)}{|x-5|}$ باشد کمترین قیمت x عبارت از:

1) -2

2) -1

3) 2

4) 3

76. هرگاه z یک عدد مختلط باشد در افاده $3+\bar{z}=(1+3i)z$ قیمت z عبارت از:

1) $\frac{2}{3}+i$
2) $\frac{2}{3}-i$
3) $\frac{3}{2}-i$
4) $\frac{3}{2}+i$

77. هرگاه z یک عدد مختلط باشد در افاده $z+3i=\bar{z}\cdot 4i$ قیمت z عبارت از:

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$
2) $\frac{4}{5}+\frac{1}{5}i$
3) $\frac{1}{3}-\frac{4}{3}i$
4) $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}i$

78. هرگاه $Z_1=x+5i$ و $Z_2=3-4i$ طوریکه $|Z_1-Z_2|=15$ در این صورت $\sum x$ عبارت از:

1) 3
2) 6
3) 9
4) 10

فصل چهارم

ترادف ها (تصاعد ها)

تصاعد: ردیف اعدادی که به طور منظم بر اساس یک اصل معین (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) استوار باشد ، تصاعد (ترادف) گفته می شود.

تصاعد حسابی: هرگاه حاصل تفریق هر جوره از حدود متعاقب در یک ردیف اعداد یک عدد مساوی باشد تصاعد حسابی گفته می شود.

در صورتی که a_1 حد اول ، d فرق مشترک ، n تعداد جملات ، a_n حد اخیر و S_n حاصل جمع را نشان دهند، ترادف $(a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \ldots)$ یک تصاعد حسابی را ارائه می نماید.

فورمول حد اخیر (حد a_n): در صورتی که a_1 حد اول ، d فرق مشترک ، n تعداد جملات یک تصاعد حسابی باشد پس حد اخیر آن از رابطه ذیل بدست می آید:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حد وسطی تصاعد حسابی: در صورتیکه سه جمله متعاقب یک تصاعد حسابی a_{n-1}, a_n, a_{n+1} باشد حد وسطی آن $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ در حالیکه $n = 2,3,4,\ldots$ باشد.

شامل سازی m جمله در تصاعد حسابی : در صورتیکه a_1 حد اول و a_n حد اخیر باشد و بخواهیم m جمله را شامل تصاعد نماید فرق مشترک از رابطه ذیل به دست می آید:

$$m = \frac{a_n - a}{m+1}$$

همچنان هرگاه در یک تصاعد حسابی حدود n ام و m ام معلوم باشد قیمت d از رابطه ذیل به دست می آید:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

حاصل جمع سلسله های حسابی: مجموعه تصاعد حسابی را سلسله حسابی می گویند.

یعنی $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$ که از روابط ذیل دریافت می گردد.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

حاصل جمع اعداد یکسان (ثابت):

$$c + c + c + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c = \sum_{i=1}^{n} c = c.n$$

حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$$

$$S_n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طبیعی:

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots\dots\dots+n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طبیعی:

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots\dots\dots+n^3=\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$$2+4+6+\dots\dots\dots\dots+2n=\sum_{i=1}^{n} 2i$$

$$S_n=n(n+1)$$

حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$$2^2+4^2+6^2+\dots\dots\dots\dots+(2n)^2=\sum_{i=1}^{n}(2i)^2$$

$$S_n=\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طبیعی جفت:

$$2^3+4^3+6^3+\dots\dots\dots\dots+(2n)^3=\sum_{i=1}^{n}(2i)^3$$

$$S_n=2n^2(n+1)^2$$

حاصل جمع اعداد مسلسل طبیعی تاق:

$$1+3+5+\dots\dots\dots\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$S_n=n^2$$

حاصل جمع مربعات اعداد مسلسل طبیعی تاق:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots\ldots\ldots+(2n-1)^2=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$$

$$S_n=\frac{1}{3}n(4n^2-1)^2$$

حاصل جمع مکعبات اعداد مسلسل طبیعی تاق:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots\ldots\ldots+(2n-1)^3=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3$$

$$S_n=n^2(2n^2-1)$$

مجموعه ضرب دو عدد پی در پی:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots\ldots\ldots+(n-1)\cdot n=\sum_{i=1}^{n}(i-1)i$$

$$S_n=\frac{1}{3}n(n^2-1)$$

تصاعد هارمونیک:

یک ترادف اعداد a_n را زمانی تصاعد هارمونیک می گویند که معکوس آن یعنی $b_n=\frac{1}{a_n}$ یک تصاعد حسابی را تشکیل می دهد. مثلاً: $\frac{1}{2},\frac{3}{7},\frac{3}{8},\frac{1}{3},\frac{3}{10},\ldots$ یک تصاعد هارمونیک است ، زیرا معکوس آن یک تصاعد حسابی است یعنی: $2,\frac{7}{3},\frac{8}{3},3,\frac{10}{3},\ldots$

اوسط حسابی هارمونیک:

در حالیکه a_{n-1},a_n,a_{n+1} سه جمله مسلسل تصاعد حسابی و $n=2,3,4,\ldots$ باشد چنانچه $\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}}$ حدود تصاعد هارمونیک ان باشد پس اوسط حسابی هارمونیکی عبارت است از:

$$a_n=\frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

تصاعد هندسی:

در صورتیکه a_1 حد اول r,q نسبت مشترک ، n تعداد جملات ، a_n حد اخیر و S_n حاصل جمع را نشان دهد ، ترادف $(a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, ...)$ یک تصاعد هندسی را ارائه می نماید.

فورمول حد اخیر: در صورتیکه a_1 حد اول r,q نسبت مشترک ، n تعداد جملات یک تصاعد هندسی باشد حد اخیر آن a_n از رابطهٔ ذیل بدست می آید. $a_n = a_1q^{n-1} \quad , \quad a_n = a_1r^{n-1}$

شامل سازی m جمله در تصاعد هندسی: جهت شامل سازی m جمله در بین تصاعد هندسی که a_1 حد اول ، a_n حد اخیر باشد ، از رابطه ذیل استفاده گردیده و نسبت مشترک دریافت می گردد.

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad , \quad q = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

حد وسطی تصاعد هندسی: هرگاه b, M, a سه حد مسلسل یک تصاعد هندسی معلوم باشد پس حد وسطی تصاعد مذکور عبارت است از: $M = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})} \quad , \quad M = \sqrt{a \cdot b}$

یادداشت: در صورتیکه a_1 حد اول و a_n حد اخیر یک تصاعد هندسی باشد حاصل ضرب n جمله آن عبارت است از: $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

حاصل جمع سلسله های هندسی : با در نظر داشت a_1 حد اول ، $r(q)$ نسبت مشترک و n جملات می توان حاصل جمع سلسله های هندسی را از روابط ذیل بدست آورد.

$$S_n = a_1\frac{r^n - 1}{r-1} \quad , \quad S_n = a_1\frac{q^n - 1}{q-1} \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \quad , \quad S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{r-1} \qquad (2)$$

حاصل جمع سلسله های نامحدود هندسی: یک سلسله هندسی زمانی نا محدود است که $n \to \infty$ نماید ، مانند : $a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ...$ سلسله های مذکور به دو حالت ذیل ملاحظه می گردد:

- هرگاه $q > 1$ باشد ، پس : $a_n \to \infty$ و سلسله متباعد بوده که $S_n = \infty$ می گردد.
- هرگاه $q < 1$ باشد ، پس: $a_n \to 0$ و سلسله متقارب بوده که $S_n = \frac{a_1}{1-q}$ می گردد.

سوالات

1. اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ حدود یک ردیف $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = d$ باشد، پس ردیف مذکور چه نوع ردیف است:

1) حسابی
2) هارمونیک
3) هندسی
4) هندسی و متزاید

2. هرگاه $2p+3$ ، $p+1$ ، $2p$ ترادف حسابی را تشکیل دهند، پس قیمت p مساوی است به:

1) 2
2) -2
3) $-\frac{1}{2}$
4) $\frac{1}{2}$

3. اگر حد n -ام یک ردیف $a_n = (-1)^n \frac{5}{2}$ باشد، پس حد $200-$ام آن مساوی است به:

1) $\frac{5}{2}$
2) 1000
3) 500
4) $\frac{-5}{2}$

4. اگر $a_1 = 1 , a_n = a_{n-1} + 5$ باشد جمله پنجم این ترادف عبارت از:

1) 11
2) 16
3) 21
4) 26

5. اگر حاصل جمع حدود یک تصاعد حسابی به صورت $S_n = 4n^2 - 3n$ ارائه شده باشد حد اول آن عبارت است از:

1) 1
2) 0
3) 2
4) 4

6. مجموعه سه حد اول یک تصاعد 31 است مجموع حد اول و حد سوم آن 26 است حد دوم عبارت است از:

1) 5
2) 6
3) 4
4) 3

7. $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ مساوی است به:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 2) $\sum_{i=0}^{n} a_i$ 3) $\sum_{i=1}^{m+n} a_i$ 4) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

8. ارایه سلسله اعداد $(1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+\cdots+(n^2-1)$ بصورت سگما عبارت است از:

1) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)$ 2) $\sum_{k=1}^{n}(1-k^2)$

3) $\sum_{k=1}^{n-1}k^2$ 4) همه درست است

9. اگر حد اول یک ردیف هندسی 2 و نسبت مشترک آن 3 باشد، پس حد 50-ام مساوی است به:

1) $a_{50} = 2 \cdot 3^{49}$ 2) $a_{50} = 2 \cdot 3^{50}$

3) $a_{50} = 3 \cdot 2^{49}$ 4) $a_{50} = 3 \cdot 2^{50}$

10. در ترادف هندسی $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس a_{500} به شکل ذیل است:

1) $a^{500} = a_3 \cdot r^{595}$ 2) $a^{500} = a_4 \cdot r^{595}$

3) $a^{500} = a_4 \cdot r^{496}$ 4) $a^{500} = a_2 \cdot r^{599}$

11. اگر $\{a_{ij}\}_{n\in IN} = (-1)^{600n} \times 2$ یک ردیف باشد، پس تفاضل حدود 500-ام و 5000-ام آن مساوی است به:

1) 2 2) 0

3) 6 4) 4

12. در ردیف ... ,1,5,9 مجموع چند حد مساوی به 190 می شود؟

1) $n = 7$ 2) $\mathrm{n} = 25$

3) $n = 10$ 4) $n = 15$

13. اگر در یک ردیف حسابی حد پنجم 20 و حد پانزدهم 80 باشد، پس حد اول آن عبارت است از :

1) $a_1 = -4$
2) $a_1 = 3$
3) $a_1 = 4$
4) $a_1 = 5$

14. $\sum_{i=1}^{60} i$ مساوی است به:

1) 1835
2) 1834
3) 1838
4) 1830

15. در ترادف $a_1, a_2, a_3, \dots . a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس حد a_{800} به شکل ذیل است:

1) $a_{800} = a_4 r^{799}$
2) $a_{800} = a_4 r^{794}$
3) $a_{800} = a_6 r^{794}$
4) $a_{800} = a_3 r^{794}$

16. اگر حد اول یک ردیف حسابی 2000باشد، پس حد 3000–ام عبارت است از:

1) $a_{3000} = 2000 + 3001d$
2) $a_{3000} = 3000$
3) $a_{3000} = 2000$
4) $a_{3000} = 2000 + 2999d$

17. در ترادف $a_n = \frac{n+5}{2n-4}$ قیمت $a_1 + a_3$ عبارت از:

1) 1
2) 2
3) 4
4) 6

18. هرگاه ترادف $a_n = \begin{cases} n-1, n = 0(mod3) \\ 2n+4, n = 1(mod3) \\ n^2 - n, n = 2(mod3) \end{cases}$ داده شده باشد قیمت $\frac{a_5}{a_6} \cdot a_{13}$ عبارت از:

1) 60
2) 80
3) 120
4) 150

19. در ردیف $a_n = \begin{cases} 2n, n = 0(mod3) \\ n-1, n = 1(mod3) \\ \frac{(n+1)}{3}, n = 2(mod3) \end{cases}$ قیمت $a_{14} + a_9 + a_{22}$ عبارت است از:

1) 22
2) 26
3) 42
4) 44

20. در ردیف $-5,0,5,\dots,40$ مجموع حدود آن مساوی است به:

1) 170 2) 175 3) 180 4) 165

21. اگر در یک ردیف حسابی حد35ـ ام آن 750 و حد 10–ام آن 50 باشد ،فرق مشترک ردیف عبارت از:

1) 28 2) 25 3) 26 4) 23

22. در سلسله $1+3+5+7+9+\cdots$ مجموعه $(n+1)$ حد مساوی است به:

1) $S_{n+1}=n^2+1$ 2) $S_{n+1}=(n+1)^2$
3) $S_{n+1}=n^2$ 4) $S_{n+1}=n^2-1$

23. در یک ترادف حسابی $a_{31}=5$ و $a_{30}=\frac{34}{5}$ است، پس حد a_3 آن مساوی است به:

1) $a_3=1$ 2) $a_3=\frac{7}{5}$ 3) $a_3=\frac{5}{2}$ 4) $a_3=\frac{2}{5}$

24. در یک ترادف حسابی $a_{11}=7$ و $a_{12}=3$ است، پس حد a_4 مساوی است به:

1) $a_4=1$ 2) $a_4=\frac{7}{5}$ 3) $a_4=\frac{9}{5}$ 4) $a_4=\frac{8}{5}$

25. در ترادف حسابی $a_1,a_2,a_3,\dots a_n$ طوریکه فرق مشترک d باشد، پس حد a_{202} به شکل ذیل است :

1) $a_{202}=a_1+2000d$ 2) $a_{202}=a_2+2000d$

3) $a_{202}=a_1+2001d$ 4) $a_{202}=a_1+201d$

26. در ردیف .... ,8,10,12 حد چندم $a_n = 46$ میشود:

1) $n = 20$ 2) $n = 30$ 3) $n = 40$ 4) $n = 10$

27. در ترادف $a_n = \frac{2^n}{n!}$ و حد a_5 عبارت است از:

1) $a_5 = \frac{32}{24}$ 2) $\frac{32}{220}$ 3) $\frac{120}{32}$ 4) $\frac{4}{15}$

28. $,x,x^2,x^3,....$ $x > 1$ چه نوع یک ردیف است:

1) هارمونیک 2) متناقص 3) حسابی 4) هندسی

29. اگر $a_n = (-1)^n \frac{3}{5}$ یک ردیف حسابی باشد، پس فرق مشترک آن عبارت است از:

1) $d = \frac{9}{25}$ 2) $d = 0$ 3) $d = 1$ 4) $d = \frac{7}{5}$

30. اگر حد n –ام یک ردیف $a_n = \frac{(-1)^n}{n-1}$ باشد، پس حد دهم این ردیف مساوی است به:

1) 2 2) 11 3) 9 4) $\frac{1}{9}$

31. اگر a_nام و a_mام یک ردیف حسابی باشد، پس فرق مشترک آن عبارت است از:

1) $d = \frac{a_n - a_m}{n+m}$ 2) $d = \frac{a_n + a_m}{n+m}$

3) $d = \frac{n-m}{a_n - a_m}$ 4) $d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$

32. اگر حد اول یک ردیف حسابی 2000باشد، پس حد 3000–ام عبارت است از:

1) $a_{3000} = 2000 + 3001d$ 2) $a_{3000} = 3000$

3) $a_{3000} = 20000$ 4) $a_{3000} = 2000 + 2999$

33. اگر در یک ردیف هندسی $a_{30} = 64$ و نسبت مشترک آن $r = \frac{1}{4}$ باشد،پس حد اول آن عبارت از:

1) $a_1 = 4^{26}$ 2) $a_1 = 4^{30}$
3) $a_1 = 4^{31}$ 4) $a_1 = 4^{32}$

34. ردیف... $x, x^2, x^3,$, $x \in IR^+$ متناقص است اگر:

1) $x < 0$ 2) $0 < x < 1$ 3) $x > 1$ 4) $x > 0$

35. مجموع ده حد ردیف... $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9},$ مساوی است به:

1) $S_{10} = 3^{10} - 1$ 2) $S_{10} = \frac{3^9}{3^{10}-1}$
3) $S_{10} = \frac{3^{10}+1}{3^9}$ 4) $S_{10} = \frac{3^{10}-1}{3^9}$

36. حاصل $0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \cdots$ مساوی است به:

1) $\frac{11}{99}$ 2) $\frac{12}{99}$ 3) $\frac{99}{12}$ 4) $\frac{12}{10}$

37. در ترادف $a_1, a_2, a_3, \dots . a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس حد a_{800} به شکل ذیل است:

1) $a_{800} = a_4 r^{799}$ 2) $a_{800} = a_4 r^{794}$
3) $a_{800} = a_6 r^{794}$ 4) $a_{800} = a_3 r^{794}$

38. $\sum_{i=1}^{10} 2$ مساوی است به:

1) 20 2) 40 3) 30 4) 10

.39 در ردیف $\frac{1}{9},\frac{1}{6},\frac{1}{3}, \ldots$ حد n–ام عبارت است از:

1) $a_n = \frac{1}{n-3}$ 2) $a_n = \frac{1}{n}$ 3) $a_n = \frac{1}{3n}$ 4) $a_n = 3n$

.40 $\sum_{i=1}^{p} x$ مساوی است به:

1) px 2) $(p-1)x$ 3) $p+1$ 4) $(p+1)x$

.41 در ردیف $4,12,36,\ldots.$ حد n–ام مساوی است به:

1) $a_n = \frac{4}{3}3^n$ 2) $a_n = \frac{4}{3}3^{n-1}$

3) $a_n = 4\cdot 3^{n+2}$ 4) $a_n = 4\cdot 3^{n+1}$

.42 مجموعه $\sum_{i=1}^{8}(i+2)$ مساوی است به:

1) $5i+20$ 2) $6i+12$ 3) $5i+10$ 4) 52

.43 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ مساوی است به:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_{i+1}$ 2) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 3) $\sum_{i=1}^{n+1} a_i$ 4) $\sum_{i=0}^{n} a_i$

.44 اگر $\{a_{ij}\}_{n\in IN} = (-1)^{600n} \times 2$ یک ردیف باشد، پس تفاضل حدود 500–ام و 5000–ام آن مساوی است به:

1) 2 2) 0 3) 6 4) 4

45. هرگاه a, b, c جملات متوالی یک ترادف هندسی باشند در این صورت:

1) $b^2 = \frac{a}{c}$ 2) $b^2 = ac$ 3) $b^2 = 2ac$ 4) $b^2 = \frac{2a}{c}$

46. اگر $q + q^2 + q^3 + \cdots$ یک سلسله هندسی و $|q| < 1$ باشد، پس مجموع مذکور مساوی است به:

1) $\frac{q}{1-q}$ 2) $\frac{1}{1+q}$ 3) $1 - q$ 4) $\frac{q}{1+q}$

47. در ترادف هندسی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ طوریکه نسبت مشترک r باشد، پس a_{500} به شکل ذیل است:

1) $a^{500} = a_3 \cdot r^{595}$ 2) $a^{500} = a_4 \cdot r^{595}$
3) $a^{500} = a_4 \cdot r^{496}$ 4) $a^{500} = a_2 \cdot r^{599}$

48. معکوس مضربهای عدد 5 کدام نوع ردیف می باشند:

1) ردیف هارمونیکی   2) ردیف متناوب
3) ردیف هندسی   4) ردیف حسابی

49. $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{7}$ مساوی است به:

1) $\sum_{i=2} \sqrt{i}$ 2) $\sum_{i=1} \sqrt{i}$ 3) $\sum_{i=2} \sqrt{2i}$ 4) $\sum_{i=-2} \sqrt{i}$

50. مجموعه $\frac{1}{5^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} 5^{k-1}$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{4}$ 2) 0.4 3) 4 4) $\frac{1}{2}$

51. مجموع نامتناهی $S_{\infty}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k+2^k}{5^k}$ عبارت است از:

1) 2 2) $\frac{13}{6}$ 3) 3 4) $\frac{17}{6}$

فصل پنجم

لوگارتم

تعریف: طرز ارائه دیگر طاقت لوگارتم گفته می شود یا به عباره دیگر لوگارتم عبارت از طرز محاسبه توان مجهول می باشد.

در صورتیکه $x \in R, a \neq 1, N > 0$ باشد : $N = a^x$ یک تابع اکسپونشیل باشد سپس معکوس آن تابع لوگارتمی گفته می شود.یعنی:

$$a^x = N \Rightarrow \log_a^N = x$$

بخاطر داشته باشید که a قاعده لوگارتم ، x نتیجه لوگارتم و N انتی لوگارتم x نامیده میشود یعنی:

$$anti\log x = N$$

انواع لوگارتم: بطور عموم لوگارتم به دو نوع میباشد.

1) **لوگارتم اعشاری (لوگارتم معمولی):** که قاعده آن (10) است یعنی:

$$\log_{10} N = \log N$$

طوریکه:

$\log N =$ (مشخصه) کرکترستیک+مانتیس

مشخصه لوگارتم مذکور از تعداد m رقم اعداد صحیح به اندازه $(m-1)$ می باشد و برای اعداد کوچکتر از یک به تعداد مجموعه m صفر طرف چپ ، مشخصه آن $(-m)$ می باشد.

مانتیس لوگارتم قسمت اعشاری نتیجه لوگارتم بوده که به کمک جدول لوگارتم یا ماشین های حساب قابل دریافت می باشد.

2) **لوگارتم غیر اعشاری :** که قاعده آن غیر از عدد (10) است که یکی از جمله لوگارتم های غیر اعشاری لوگارتم طبیعی به قاعده e می باشد ، یعنی : $\log_e N = \ln N$

خواص لوگارتم: در حالیکه $a \neq 1$ و اعداد مانند ، $0 < M$ و $N > 0$ باشد ، برای لوگارتم خواص ذیل وجود دارد:

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$

4) $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

5) $\log_a \left(\dfrac{1}{M}\right) = -\log_a M = co\log_a M$

6) $\log_a M^n = n \log_a M$

7) $\log_a \sqrt[n]{M^p} = \dfrac{p}{n} \log_a M$

8) $\log_a M = \dfrac{1}{\log_M a}$

9) $\log_{a^m} M^n = \dfrac{n}{m} \log_a M$

10) $\log_a M = \dfrac{\log_c M}{\log_c N}$

11) $a^{\log_a M} = x \Rightarrow x = M$

12) $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdots\cdots \log_n m = \log_n a$

13) $\log_c \left[\log_b (\log_a x)\right] = n \Rightarrow x = a^{b^{c^n}}$

14) $a^{\log_b x} = c^{\log_b x} \Rightarrow a^{\log_b x} = a^{\log_b c} \Rightarrow \log_b x = \log_b c \Rightarrow x = c$

سوالات

1. مانتیس $\log 582$ مساوی است به:

1) $\log 58.2$ 2) $\log 5.082$ 3) $\log 5.82$ 4) $\log 0.582$

2. انتی لوگاریتم $anti\log_3\left(\frac{1}{2}\right)$ مساوی است به:

1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt[3]{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. $\ln x$ مساوی است به:

1) $\log_{10} e \cdot \log x$ 2) $-\ln x$
3) $-\log_{10} e \cdot \ln x$ 4) $\ln 10 \cdot \log x$

4. قیمت عددی $\frac{1+\log 90}{\log 30}$ عبارت است از:

1) 3 2) 1 3) 4 4) 2

5. اگر $\log 9.53 = 0.9791$ باشد، $Anti\log 0.9791$ عبارت است از:

1) 9.53 2) 953 3) 95.3 4) 9.35

6. اگر a, b, c یک تصاعد هندسی باشد آنگاه $\frac{1}{\log_a x}, \frac{1}{\log_b x}, \frac{1}{\log_c x}$ عبارت است از:

1) تصاعد هارمونیک 2) تصاعد حسابی 3) تصاعد هندسی 4) هیچکدام

7. $logtg3° . logtg6°. logtg9° …… logtg87° =?$

1) 1 ‏ 2) 0 ‏ 3) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ ‏ 4) $\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

8. کرکتریستیک لوگارتم $\log\left(\frac{0.000001}{0.1}\right)$ مساوی است به:

1) -6 ‏ 2) -4
3) 5 ‏ 4) -5

9. مانتیس $\log 0.7114$ عبارت است از:

1) $\log 7.114$ ‏ 2) $\log 7.14$ ‏ 3) $\log 714$ ‏ 4) $\log 0.174$

10. مانتیس $\log 5231$ عبارت است از:

1) $\log 52)31$ ‏ 2) $\log 5.231$ ‏ 3) $\log 0.5231$ ‏ 4) $\log 5231$

11. اگر $\log_2 3 = a$ باشد، در این صورت قیمت $\log_3 48$ عبارت است از:

1) $\frac{a+2}{a}$ ‏ 2) $\frac{a-3}{a}$ ‏ 3) $\frac{a+3}{a}$ ‏ 4) $\frac{a+4}{a}$

12. کرکتریستیک $\log((0.0025)(0.00023))$ مساوی است به:

1) 7 ‏ 2) 12 ‏ 3) -6 ‏ 4) -7

13. حاصل افاده $\sqrt{\left(\log\left(\frac{80!\cdot 10!}{8!\cdot 78!\cdot 79\cdot 9}+\frac{20!\cdot 10!}{8!\cdot 18!\cdot 19\cdot 9}\right)\right)}$ مساوی است به:

1) $\sqrt{3}$ ‏ 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ‏ 3) تعریف نشده است ‏ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. اگر $\log 9.85 = 0.9934$ باشد، پس $\ln 9.85$ مساوی است به:

1) 2,2874 ‏ 2) 3,8451 ‏ 3) 5.8134 ‏ 4) 4,8531

.15 هرگاه $\log_2 3 = a$ و $\log_2 7 = b$ باشد قیمت افاده $\log_6 21$ عبارت است از:

1) $\frac{a-b}{a+1}$ 2) $\frac{a+b}{a+1}$ 3) $\frac{a+b}{a-1}$ 4) $\frac{a+b}{a}$

.16 قیمت افاده لوگاریتمی $\ln 4 \cdot \log_4 9 \cdot \log_3 e$ عبارت از:

1) 1 2) 4 3) $\ln 5$ 4) 2

.17 قیمت افاده لوگاریتمی

$\frac{2}{3}\log(x^2-y^2) - \frac{1}{2}[\log(x-y)+\log(x+y)]$ عبارت است از:

1) $\log \sqrt[6]{x^2-y^2}$ 2) $\log \sqrt[3]{x^2-y^2}$

3) $\log \sqrt[6]{x^2+y^2}$ 4) $\log \sqrt[3]{x^2+y^2}$

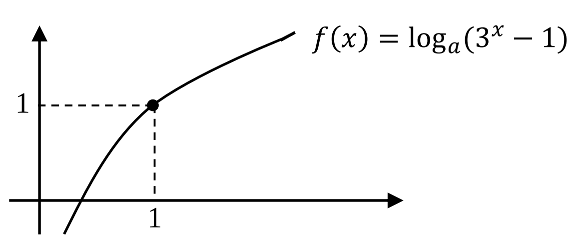
.18 هرگاه $\log_a b = 2$ ، $\log_b c = 3$ و $\log_c d = 4$ باشد، قیمت $\log_a(a \cdot b \cdot c \cdot d)$ عبارت از:

1) 30 2) 33 3) 27 4) 26

.19 قیمت افاده لوگاریتمی $\log_x\left(e^{2\ln x} \cdot 100^{\log x}\right)$ عبارت از:

1) 2 2) 4 3) x^2 4) $\frac{x}{e}$

.20 با در نظرداشت گراف ذیل قیمت $\log_a 4^a$ عبارت است از:



1) 8
2) 4
3) 2
4) $\frac{1}{2}$

.21 قیمت افاده لوگاریتمی $\frac{\log_x 8}{\log_y 3} \cdot \frac{\log_y\left(\frac{1}{9}\right)}{\log_x\left(\frac{1}{2}\right)}$ عبارت از:

3 (1 | -4 (2 | 6 (3 | 24 (4

.22 مانتیس $\log\left(\frac{8}{1000}+8\right)$ عبارت از ؟

1) $\log 0{,}8008$ | 2) $\log 8{,}08$

3) $\log 8{,}0008$ | 4) $\log 8{,}008$

.23 مانتیس $\log 5231$ عبارت از:

1) $\log 52)31$ | 2) $\log 5.231$ | 3) $\log 0.5231$ | 4) $\log 5231$

.24 کرکترستیک $\log[(0.08)(0.003)]$ مساوی است به:

5(1 | -4 (2 | 4 (3 | -5 (4

.25 افاده لوگارتمی $\log_{14} 25 \,.\, \log_5 14$ مساوی است به:

2(1 | 1 (2 | -1 (3 | 0 (4

.26 شکل ساده $log^5(4900)$ عبارت از:

1) $10\, log^{50}(49)$ | 2) $32\log(70)$

3) $32(\log(49)+2)^5$ | 4) $(\log(49)+2)^5$

.27 مانتیس لوگارتم $\log 40.00009$ عبارت از:

1) $\log 4{,}9$ | 2) $\log 4{,}0009$

1) $\log 4{,}000009$ 4) $\log 4{,}9 \cdot 10^3$

28. حاصل افاده $\log\left(\frac{80!\cdot 10!}{8!\cdot 78!\cdot 79\cdot 9}+\frac{20!\cdot 10!}{8!\cdot 18!\cdot 19\cdot 9}\right)$ مساوی است به:

1) 4 2) 3 3) 9 4) 6

29. شکل ساده شده افاده $\log^3 \log_5^2(25)$ مساوی است به:

1) $2\log^3(2)$ 2) $6\log(2)$ 3) $\log^3(2)$ 4) $8\log^3(2)$

30. $\log 7 \cdot \log_7 10$ مساوی است به:

1) 1 2) -1 3) 2 4) 3

31. $\log_b x^7 \log_a b$ مساوی است به:

1) $\log_b x$ 2) $\log_a x$ 3) $\log_a bx$ 4) $7\log_a x$

32. $colog\ 100$ مساوی است به:

1) $\log\frac{1}{100}$ 2) $\log 100$ 3) 100 4) $\log\frac{1}{1000}$

33. مانتیس لوگارتم $\log\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\right)$ عبارت است از:

1) $\log\frac{1}{2}$ 2) مانتیس ندارد 3) $\log\sqrt{2}$ 4) $\log 5$

34. $\log_b m$ مساوی است به:

1) $\frac{\log_a b}{\log_a m}$ 2) $\frac{\log_a m}{\log_a b}$ 3) $\log_m b$ 4) $-\log_m b$

35. اگر $\log_2 3 = a$ باشد، در این صورت قیمت $\log_3 48$ عبارت است از:

1) $\frac{a+2}{a}$ 2) $\frac{a-3}{a}$ 3) $\frac{a+3}{a}$ 4) $\frac{a+4}{a}$

36. کرکترستیک $\log(1.\bar{2} \times 1.\bar{9})$ مساوی است به:

1) 1 2) 0
3) 2 4) تعریف نشده است

37. اگر $\log 5.34 = 0.7275$ باشد، پس $\ln 5.34$ مساوی است به:

1) $2)6751$ 2) 1.6751 3) $-2)6751$ 4) -1.6751

38. قیمت $p(\log_4 2)$ درپولینوم $p(x) = x^5$ مساوی است به:

1) $20 \log_2 10$ 2) $20 \log_2 2$
3) $1024 \log_2 10$ 4) $1024 \log_2 2$

39. در معادله لوگارتمی $1+\ln(e-x)=\ln(x+3)$ قیمت x مساویست به:

1) $\frac{e^2-3}{e+1}$ 2) $\frac{e+3}{e-1}$ 3) $\frac{e^2-1}{e+3}$ 4) $\frac{e-1}{e^2+3}$

40. قیمت x در معادله نمایی $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2+\log_x 11} = 11$ عبارت است از:

1) $x = -\frac{1}{11}$ 2) $x = \frac{1}{11}$
3) $x = 11$ 4) $x = -11$

41. ست حل معادله $x^{\ln x} - e^6 . x = 0$ عبارت از:

1) $\left\{e^3, \frac{1}{e^2}\right\}$ 2) $\left\{e^3, \frac{1}{e^3}\right\}$ 3) $\left\{e, \frac{1}{e}\right\}$ 4) حل ندارد

.42 قیمت x در معادله لوگارتمی $\log_2(4sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)) = 2$ عبارت از:

1) 2 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) 0

.43 اگر $ln\ (xy) = 3$ و $ln\ x - ln\ y = 1$ باشد در این صورت قیمت های y و x عبارت از:

1) (e^2, e) 2) (e^2, e^2) 3) (e^3, e^2) 4) (e^3, e^3)

.44 حل غیر مساوات $\log_{0.5} \frac{2-x}{3} < 0$ عبارت از:

1) $x < -1$ 2) $x > -1$ 3) $x < 1$ 4) $x > 1$

.45 قیمت x در معادله $\log_5^{-x} + \log_5^{(4-x)} = \log_5^{12}$ عبارت است از:

1) -2 2) 6

3) -4 4) 1و2 درست است

.46 برای کدام قیمت x معادله $\frac{2\log_{10} x}{\log_{10}(5x-4)} = 1$ صدق میکند:

1) 5 2) 3 3) 4 4) 2

.47 حل معادله $\log^3(x+1)^{\frac{1}{4}} = 27$ مساوی است به:

1) $x = 10^{12} - 1$ 2) $x = 10^{12} - 12$

3) $x = 10^{12} + 1$ 4) $x = 10^{12} + 12$

.48 در معادله لوگاریتمی $2^{\log x} = 3^{\log 2}$ قیمت x عبارت است از:

1) 5 2) 7 3) 3 4) 9

49. حاصل ضرب جذور معادله $(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 6 = 0$ عبارت از:

1) 3^{-7} 2) 3^{-3} 3) 3^2 4) 3^5

50. هرگاه $x \in Z$ باشد حاصل جمع جذور نامساوی $\log_3(x+1) + 1 < \log_3 25$ عبارت از:

1) 25 2) 26 3) 27 4) 28

51. قیمت x در معادله $e^x - 12e^{-x} - 4 = 0$ عبارت از:

1) $\ln 2$ 2) $\ln 4$ 3) $\ln 6$ 4) $\ln 8$

52. قیمت x در معادله لوگاریتمی $\log_5[5\log_2 2(\ln(x+1)] = 1$ عبارت از:

1) $e-2$ 2) $e-1$ 3) $e+1$ 4) e^2

53. قیمت x در معادله لوگاریتمی $\frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_6 x} + \frac{1}{\log_9 x} = 2^{\log_8 27}$ عبارت از:

1) 4 2) 6 3) 9 4) 10

54. قیمت x در معادله لوگاریتمی $(\log_{\sqrt{2}} x)(\log_x \sqrt{2})^2 = 2$ عبارت است از:

1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt[3]{2}$
3) $\sqrt[4]{2}$ 4) $\sqrt[5]{2}$

55. قیمت x در معادله $\log_x 2 = \log_{2x} 8$ عبارت از:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\sqrt{2}$
3) 2 4) $2\sqrt{2}$

.56 حل معادله لوگاریتمی $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{e^2+1}{e}$ مساوی است به:

1) $x = e$ 2) $x = e^2$ 3) $x = 4^e$ 4) $x = 2^e$

.57 در معادله $2^{\log_2(2x+4)} = 2^4$ قیمت x مساوی است به:

1) $x = 0$ 2) $x = -6$ 3) $x = 7$ 4) $x = 6$

.58 در معادله $\log_5(x-1) - \log_5(x-2) = \log_5 2$ قیمت x مساوی است به:

1) $x = -3$ 2) $x = 2$ 3) $x = 3$ 4) $x = \frac{1}{3}$

.59 قیمت x در معادله $\log_2 \frac{1}{2} + \log_2(x+1) = 1$ مساوی است به:

1) $x = -3$ 2) $x = 3$ 3) $x = 1$ 4) $x = -1$

.60 در معادله $5^{x+2} = 7$ قیمت x مساوی است به:

1) $x = \log_x 5 - 2$ 2) $x = \log_3 7 - 2$

3) $x = \log_5 7 - 2$ 4) $x = \log_7 5 + 2$

.61 حل معادله $\log^5 x^3 = 243$ مساوی است به:

1) $x = 0.100$ 2) $\mathrm{x} = 100$

3) $\mathrm{x} = 10$ 4) $\mathrm{x} = 0.001$

.62 در معادله لوگارتمی $1 + \ln(e - x) = \ln(x + 3)$ قیمت x مساوی است به:

1) $\frac{e^2-1}{e+3}$ 2) $\frac{(e-1)}{e^2+3}$ 3) $\frac{e^2-1}{e+1}$ 4) $\frac{e+3}{e-1}$

.63 قیمت x در معادله $\log_3 \frac{1}{3} + \log_3(x+1) = 1$ مساوی میشود به:

1) $x = 8$ 2) $x = -5$ 3) $x = 4$ 4) $x = 2$

.64 قیمت x در معادله لوگاریتمی $\log_a x = \frac{1}{3}\log_a 8$ عبارت است از:

1) 2 2) -2 3) -4 4) 4

.65 قیمت x در معادله $\frac{\log_2 x}{\log_2 5} + \log 10 = 0$ مساوی است به:

1) $x = \frac{1}{2}$ 2) $x = \frac{1}{5}$ 3) $x = 2$ 4) $x = 5$

فصل ششم

متحول و تابع

متحول: یک سمبول بوده که به عوض هر عنصر یک س ت غیر خالی وضع گردد و یا به عباره دیگر کمیت که آزادانه و بدون قید و شرط قیمت های مختلف را به خود اختیار نماید متحول نامیده می شود.

مثلاً: $A=\{x / x\in IN, x\geq 3\}$ که درست مذکور x از 3 الی بی نهایت اعداد طبیعی را گرفته میتواند.

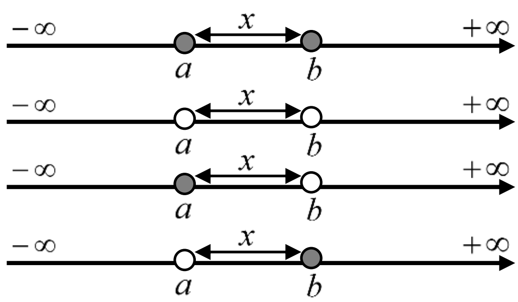
ثابت: چون قیمت یک عدد تغییر نمیکند مثلاً عدد 4 با عدد 3 و 5 هیچگاه مساوی نیست ، پس تمام اعداد حقیقی ثابت گفته می شوند.

انتروال: فاصله که در آن یک متحول تغییر و تحول می نماید بنام فاصله (ساحۀ تحول) یا انتروال یاد می گردد و به شکل دیده میشود.

1) انتروال بسته $a\leq x\leq b\Rightarrow [a,b]$

2) انتروال باز $a<x<b\Rightarrow (a,b)$

3) انتروال نیمه بسته (نیمه باز) $a\leq x<b\Rightarrow [a,b)$
$a<x\leq b\Rightarrow (a,b]$



رابطه: چون میدانیم (x, y) یک جوره مرتب روی سیستم کمیات وضعیه قایم می باشد، پس هرگاه A و B دو ست غیر خالی باشد ، هر ست فرعی $A\times B$ از A به B یک رابطه است ، یعنی $a\in A$ و $b\in B$ باشد ، و $(a,b)\in IR$ باشد پس گفته میشود که a به همرای b رابطه دارد به شکل (aRb) ارائه می گردد.

مثلاً اگر $A=\{2,3,5\}$ و $B=\{k,t\}$ باشد ، پس: $A\times B=\{(2,k),(2,t),(3,k),(3,t),(5,k),(5,t)\}$ ، پس هر ست فرعی این ست عبارت از یک رابطه است:

$$R_1=\{(2,k)\}$$
$$R_2=\{(2,k),(2,t),(3,k)\}$$
$$R_3=\{(3,k),(3,t),(2,k),(5,k)\}\cdots\cdots$$

که تعداد عناصر از A به B در حالیکه A به تعداد n عناصر و B به تعداد m عناصر داشته باشد عبارت از $n\times m$ است ، و تعداد روابط این ست عبارت از تعداد ست های فرعی آن می باشد که عبارت از $2^{n\times m}$ می باشد.

تابع: کمیت که تمام تحولات آن وابسطه به تحولات یک متحول باشد تابع نامیده میشود، و یا به عبارهٔ دیگر تابع چنان رابطه یا قاعده بین دو ست است که برای هر عنصر از ست اولی (ست ناحیه تعریف $Domian$) تنها و تنها یک عنصر در ست دومی (ست ناحیه قیمت ها $Range$) ارتباط داشته باشد.

به خاطر داشته باشید که $Range\subseteq codomain$ میباشد.

که برای بار اول مفهوم تابع و متحول توسط ایولر $(Euler)$ عالم سویسی به شکل ریاضی $y=f(x)$ ارائه گردید.

انواع توابع

توابع انواع مختلف دارد ، مانند:

تابع ثابت: که به شکل $f(x)=c$ ارائه میگردد طوریکه $c\in IR$ است ، مثلاً $\cdots, y=-5, y=2$

تابع پولینومیل: که به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ ارائه می گردد ، مثلاً $\cdots, g(x)=2x^4-5x^2+3,\ f(x)=x^2-5x+1,\ f(x)=2x+5$

به خاطر داشته باشید که تابع پولینومیل درجه اول را تابع خطی و درجه دوم را تابع پارابولی نیز یاد میکنند.

توابع مثلثاتی: مانند

$$f(x)=\sin x,\ f(x)=\cos x^3,\ f(x)=5\tan x,\ f(x)=\sec^2(2x+1),\ \cdots$$

توابع لوگارتمی: مانند $f(x)=\log_a x,\ g(x)=\ln x,\ \cdots$

توابع اکسپونیشنل (نمایی): مانند $f(x)=a^x$ (درحالیکه $a>1$ است)

$$g(x)=5^x,\ \cdots$$

تابع ناطق (کسری): مانند

$$f(x)=\frac{\sin^2 x}{4+\cos x},\ g(x)=\frac{3x^3}{\ln x^2},\ h(x)=\frac{5x^2+x^3-1}{x^3+4x},\ \cdots$$

تابع غیر ناطق (جذری): مانند

$$f(x)=\sqrt{5x^2+4},\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1},\ g(x)=\sqrt[5]{\sin^3 x},\ h(x)=\sqrt[4]{\tan^3 x},\ w(x)=\sqrt{\log_4(x^2+4)}\ \cdots$$

تابع عینیت : که قیمت های متحول و تابع با هم مساوی باشد:

$$f(x)=x$$

تابع قیمت مطلقه: مانند :

$$f(x)=|x|$$

تابع زینه ی: تابع که برای یک انتروال معین متحول x ، قیمت تابع ثابت باشد مانند:

$$f(x)=[x]$$

که در انتقال پول ، کمیشن بانکی ، انتقال پست و پارسال و غیره از آن استفاده میگردد.

ساحه موجودیت توابع:

1. **تــــابع متمــــادی (ســــاحه تعریــــف توابــــع):** هرگـــاه در تـــابع $y=f(x)$ بـــرای متحـــول x قیمـــت وضـــع گـــردد و بـــرای تـــابع مربـــوط قیمـــت دریافـــت گـــردد ، تـــابع بـــه همـــان قیمت یا قیمتها متمادی گفته میشود، یا تعریف گردیده و گراف تابع آن متصل میباشد.
2. **تــــابع غیــــر متمــــادی (ســــاحه عــــدم تعریــــف توابــــع):** هرگـــاه در تـــابع $y=f(x)$ بـــرای متحـــول x قیمـــت وضـــع گـــردد و بـــرای تـــابع مربـــوط قیمـــت دریافـــت نگـــردد ، تـــابع بـــه همـــان قیمـــت یـــا قیمتهـــا غیـــر متمـــادی گفتـــه مـــی شـــود ، یـــا بـــه همـــان قیمتهـــا تعریف نگردیده و گراف تابع مربوطه آن منفصل میباشد.

یادداشت:

1. توابـــع پولینومیـــل بـــه تمـــام قیمـــت هـــای متحـــول متمـــادی بـــوده و گـــراف آن متصـــل میباشـــد و بـــه هیچ قیمت غیر متمادی نمی باشد.
2. یـــک تـــابع نـــاطق (کســـری) زمـــانی متمـــادی اســـت کـــه مخـــرج کســـر خـــلاف صـــفر باشـــد ، هرگـــاه مخـــرج کســـر بـــرای قیمـــت یـــا قیمتهـــای متحـــول صـــفر گـــردد ، بـــه همـــان قیمـــت هـــا تـــابع غیـــر متمـــادی گفتـــه میشـــود و تعریـــف نگردیـــده ، ویـــا بـــه عبـــارهٔ دیگـــر همـــان قیمـــت هـــا شـــامل ناحیـــه تعریف نمی باشد.
3. یـــک تـــابع غیـــر نـــاطق بـــه جـــذر هـــای جفـــت زمـــانی متمـــادی اســـت کـــه افـــاده تحـــت جـــذر بزرگتـــر یا مساوی به صفر باشد و غیر متمادی است که تحت جذر کوچکتر از صفر باشد.

در حالیکه توابع مذکور به جذر نما طاق به تمام قیمت های x متمادی می باشد.

تــــابع جفـــــت و تــــاق: هرگـــاه در تـــابع $y=f(x)$ قیمـــت تـــابع $f(-x)=f(x)$ گـــردد تـــابع جفت و هرگاه $f(-x)=-f(x)$ گردد تابع تاق نامیده می شود.

ترکیـــــب توابـــــع: هرگـــاه دو تـــابع $f(x)$ و $g(x)$ را در نظـــر بگیـــریم طوریکـــه یـــک تـــابع حیثیت متحول تابع دیگر را اختیار نماید ، گفته می شود توابع مذکور ترکیب گردیده اند.

اگر تابع $g(x)$ در f ترکیب گردیده باشد به شکل $gof(x)$ یا $g(f(x))$ ارائه میگردد.

یعنی :

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

تابع یک به یک: تابع $f(x)$ تابع یک به یک نامیده میشود ، زمانی که اگر:

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \qquad \wedge \qquad a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

مثلاً: $f(x) = 5x + 1$ تابع یک به یک است ، زیرا :

اگـــر بـــرای $x = 2$ و $x = 3$ ، یعنـــی $a = 2$ و $b = 3$ قیمـــت گـــذاری گـــردد در ایـــن صـــورت داریم که:

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 5(2) + 1 = 11$$
$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 5(3) + 1 = 16$$
$$\Rightarrow 2 \neq 3, f(2) \neq f(3)$$

اما تابع $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ تابع یک به یک نیست ، زیرا :

$$x = 2 \Rightarrow g(2) = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$
$$x = -2 \Rightarrow g(-2) = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$
$$\Rightarrow 2 \neq -2, g(2) = g(-2)$$

تـــابع معکـــوس: معکـــوس رابطـــه (x, y) عبـــارت از رابطـــه (y, x) اســـت ، اگـــر ســـاحه تعریـــف تـــابع معکـــوس ســـاحه قیمـــت هـــای تـــابع و ســـاحه قیمـــت هـــای تـــابع معکـــوس ساحه تعریـــف تـــابع باشـــد ، یعنی :

$$domian\ f^{-1} = Range \qquad f$$
$$Range\ f^{-1} = domain \qquad f$$

معکوس تابع f به شکل f^{-1} نشان داده میشود ،یٔ–ن

بخاطر داشته باشید که :

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

اگــــــــر $f(x)=\{(3,1),(5,3),(-2,7)\}$ باشــــــــد ، پـــــس تـــــابع معکـــــوس آن $f^{-1}(x)=\{(1,3),(3,5),(7,-2)\}$ است.

امـــــا اگـــــــر $f(x)=\{(4,2),(5,9),(-1,2)\}$ باشـــــــد ، پـــــــس معکـــــــوس آن $f^{-1}(x)=\{(2,4),(9,5),(2,-1)\}$ نیست.

زیـــرا $f(2)=1,\ f(2)=4$ ، پـــس بـــرای $x=2$ دو تصـــویر مختلـــف در ســـاحه قیمـــت هـــا *Range* بوجـود مـی آیـد پـس در نتیجـه معکـوس هـر تـابع یـک تـابع نیسـت، یـا بـه عبـارۀ دیگـر هـر تابع معکوس پذیر نیست.

تعریـــف تـــابع معکـــوس: هرگـاه f تـابع یـک بـه یـک باشـد ، طوریکـه x ناحیـه تعریـف و y ناحیـه قیمـت هـای آن باشـد ، پـس تـابع g معکـوس تـابع f اسـت ، طوریکـه y ناحیـه تعریـف و x ناحیه قیمت های آن باشد.

مثال 1: هرگاه $f(x)=3x-5$ باشد ، معکوس تابع مذکور $f^{-1}(x)$ را دریابید؟

$$y=f(x)$$

چون:

$$y=3x-5$$

$$x=3y-5 \Rightarrow 3y=x+5 \Rightarrow y=\frac{x+5}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}$$

مثال 2: معکوس تابع $f(x)=x^3+12$ را دریابید؟

$$y=x^3+12 \Rightarrow x=y^3+12 \Rightarrow y^3=x-12$$

$$y=\sqrt[3]{x-12} \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-12}$$

انتقال عمودی: هرگاه c یک عدد مثبت باشد.

1. اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازه c واحد به شکل عمودی به طرف بالا انتقال نماید ، در این صورت تابع $y=f(x)+c$ حاصل میگردد.
2. اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازه c واحد به شکل عمودی به طرف پائین انتقال نماید ، در این صورت تابع $y=f(x)-c$ حاصل میگردد.

به طور مثال: اگر گراف تابع $y=x^2$ به طور عمودی به اندازه 2 واحد بطرف بالا و پائین انتقال نماید ، تابع انتقال یافته آن را دریابید؟

انتقال عمودی بطرف بالا $y=x^2 \Rightarrow y=x^2+2$

انتقال عمودی بطرف پایین $y=x^2 \Rightarrow y=x^2-2$

انتقال افقی: هرگاه c یک عدد مثبت باشد.

1. اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازه c واحد به شکل افقی به طرف راست انتقال نماید ، در این صورت تابع $y=f(x-c)$ حاصل میگردد.
2. اگر گراف تابع $y=f(x)$ به اندازه c واحد به شکل افقی به طرف چپ انتقال نماید ، در این صورت تابع $y=f(x+c)$ حاصل میگردد.

بطور مثال: اگر گراف تابع $y=x^2$ را به شکل افقی به اندازه 2 واحد بطرف راست و چپ انتقال نماید ، تابع انتقال یافته آنرا دریابید؟

انتقال افقی بطرف چپ $y=x^2 \Rightarrow y=(x+2)^2$

انتقال افقی بطرف راست $y=x^2 \Rightarrow y=(x-2)^2$

یادداشت: هرگاه گراف تابع $y = f(x)$ را روی سیستم کمیات وضعیه در نظر بگیریم در سه حالت ذیل منحنی مذکور متناظر است:

1. اگر $x = -x$ تبدیل گردد گراف تابع نظر به محور y متناظر است.
2. اگر $y = -y$ تبدیل گردد ، گراف تابع نظر به محور x متناظر است.
3. اگر $x = -x$ و $y = -y$ تبدیل گردد ، گراف نظر به مبدأ کمیات متناظر است.

عملیات توابع (الجبره توابع): هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع را ارائه نماید ، پس عملیات توابع فوق چنین تعریف گردیده است.

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$dom(f+g)(x) = dom\ f \cap dom\ g$

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$dom(f-g)(x) = dom\ f \cap dom\ g$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
$dom(f \cdot g)(x) = dom\ f \cap dom\ g$

4) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0)$

$dom\left(\frac{f}{g}\right)(x) = dom\ f \cap dom\ g - \{x \setminus g(x) = 0\}$

انواع مجانب ها: بطور عموم مجانب ها به سه نوع عمودی ، افقی و مایل مشاهده میگردد.

هرگاه $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ و $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0$ دو تابع پولینومیلی و $f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$ یک تابع ناطق را ارائه نماید ، پس مجانب های تابع $y = f(x)$ چنین بدست می آید:

1. **مجانب عمودی:** یک تابع ناطق زمانی دارای مجانب عمودی می گردد که $y \to \pm\infty$ نماید ، و این زمانی ممکن است که $g(x) = 0$ گردد.

2. **مجانب افقی:** یک تابع ناطق زمانی دارای مجانب افقی میگردد که $x \to \pm\infty$ نماید ، و این زمانی ممکن است که:

- هرگاه $n = m$ باشد ، مجانب افقی آن $y = \frac{a_n}{b_m}$ می باشد.
- هرگاه $n < m$ باشد ، مجانب افقی آن $y = 0$ (خط محور x) می باشد.
- هرگاه $n > m$ باشد ، تابع مجانب افقی ندارد.

بطور عموم می توان مجانب افقی را به وسیله $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{g(x)} \Rightarrow y = c$ دریافت نمود ، که بعداً به کمک لیمت توابع آنرا می توان دریافت نمود.

3. **مجانب مایل:** یک تابع ناطق زمانی دارای مجانب مایل می گردد که درجه متحول صورت (n) به اندازه یک واحد بیشتر از درجه متحول مخرج (m) باشد که برای دریافت آن حاصل تقسیم $\frac{p(x)}{g(x)}$ را دریافت می نماییم که این حاصل تقسیم یک تابع خطی $y_1 = mx + b$ به دست می آید که معادله مجانب مایل تابع می باشد..

به خاطر داشته باشید که یک تابع مجانب افقی داشته باشد مجانب مایل ندارد و برعکس آن اگر تابع مجانب مایل داشت ، مجانب افقی ندارد.

سوالات

.1 اگر $A=\{0\}$ و $B=IN$ باشد، پس $A\times B$ مساوی است به:

1) $((0,n)/n\in Q)$ 2) $\{(0,n)/n\in R\}$
3) $\{(n,0)/n\in IN\}$ 4) $\{(0,n)/n\in IN\}$

.2 اگر $R=\left\{(x,y)/y=\frac{x}{2}\right\}$ و ناحیه تصاویر این رابطه $(2,5,7)$ باشد، پس ناحیه تعریف آن مساوی است به:

1) $\{4,10,7\}$ 2) $\{4,10,4\}$
3) $\{20,10,1\}$ 4) $\{3,8,10\}$

.3 تابع $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ در کدام نقطه متمادی نیست:

1) $x=-1$ 2) $x=1$ 3) $x=0$ 4) $x=-3$

.4 ناحیه تعریف تابع $g(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{6-x}$ عبارت است از:

1) $(1,6)$ 2) $(1,6]$ 3) $[1,6]$ 4) $[1,6)$

.5 ناحیه قیمت های تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}$ عبارت است از:

1) $\{1\}$ 2) IR 3) $[-1,1]$ 4) $(-1,1)$

.6 $f(x)=\begin{cases}5 & ;\quad 0\le x<1\\ 1 & ;-4<x<0\end{cases}$ باشد، پس ناحیه تصاویر این تابع مساوی است به:

1) $\{2,1\}$ 2) $\{4,6\}$ 3) $\{5,1\}$ 4) $\{1,0\}$

7. اگر $f(x)=3^{-x}$ باشد، پس $f(5x)$ مساوی است به:

1) هیچکدام

2) $f(5x)=\dfrac{\frac{1}{2}\log_2 4}{3^{5x}}$

3) $f(5x)=\dfrac{1}{5^{3x}}$

4) $f(5x)=3^{-5x^2}$

8. اگر $f(-1)=1\ ,\ f(1)=3$ باشد تابع $f(x)=ax+b$ مشخص کننده کدام تابع ذیل است؟

1) $f(x)=x-2$

2) $f(x)=2x+2$

3) $f(x)=x+2$

4) $f(x)=2x-2$

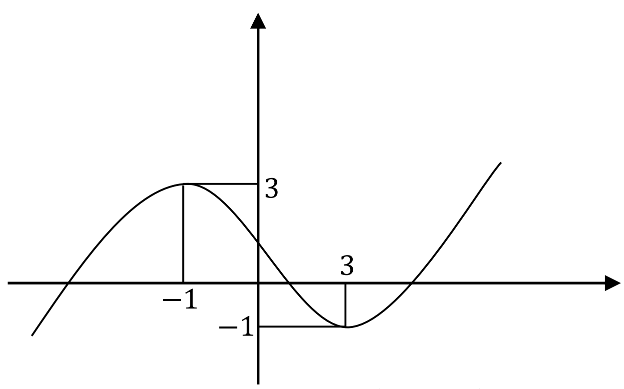
9. قیمت $f\big(f(-1)\big)$ در گراف ذیل عبارت از:

1) 3

2) 1

3) -3

4) -1



10. اگر $M(x,y)$ نقطه ای از گراف تابع $y=x^3$ باشد تناظر این نقطه نسبت به مبدا مختصات عبارت از:

1) $M`(-x,y)$

2) $M`(x,y)$

3) $M`(x,-y)$

4) $M`(-x,-y)$

11. اگر $f(x)=\sqrt{x+3}\ ,\ g(x)=4-x$ پس $(f-2g)(1)$ عبارت از:

1) -4

2) 4

3) 6

4) -6

12. اگر $A=[0,3]$ و $B=[0,2]$ باشد، پس $A\times B$ مساوی است به:

1) $A\times B=\{(0,0),(3,0),(0,2),(2,3)\}$

2) $A\times B$ ممکن نیست

3) $A\times B=\{(x,y)/0\le x\le 3 \wedge 0\le x\le 2\}$

4) $A\times B=\{(0,0),(0,3),(2,0),(2,3)\}$

13. گراف کدام یک از توابع زیر نظر به محور Y متناظر است :

1) $y = |x|$
2) $y = \frac{1}{2}$
3) $y = x$
4) $y = \sin x$

14. ناحیه تعریف $y = \log_{10} x$ عبارت است از:

1) $(0, \infty)$
2) $(-\infty, 0)$
3) $(-1,1)$
4) IR

15. کدام یک از توابع زیر در انتروال $(-\infty, +\infty)$ یک به یک است:

1) $y = |2x + 1|$
2) $y = 2x + 10$
3) $y = \cos x$
4) $f(x) = \frac{99}{\sqrt{99}} x^2 + 99$

16. ناحیه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x}$ مساوی است به:

1) $D_f = IR^+ \cup P\{0\}$
3) $D_f = IR^-$
3) $D_f = IR$
4) $D_f = \{0, \infty\}$

17. مجانب عمودی تابع $f(x) = \frac{5x+9}{0.036x-0.072}$ عبارت است از:

1) $x = 2$
2) مجانب عمودی ندارد
3) $x = 0$
4) $x = -2$

18. تابع $f(x) = |600x|$ در انتروال $(-\infty, 0)$ دارای خاصیت زیر است:

1) تابع تاق است
2) یک به یک است
3) تابع جفت است
4) گراف از نقطه $(1,600)$ عبور میکند

19. تابع $\begin{matrix} f: IR \to IR \\ f(x) = x^7 + 1 \end{matrix}$ دارای خاصیت زیر است :

1) یک به یک است
2) تاق است
3) جفت است
4) متناقص است

20. تابع $f(x) = (7x-7)^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ در نقطه ذیل متمادی نیست:

1) نقطه غیر متمادی ندارد
2) $x = \frac{2}{3}$
3) $x = 1$
4) $x = \frac{3}{2}$

21. ناحیه قیمت های تابع $f(x) = 2x^2 + 3$ عبارت است از:

1) IR
2) $[0, \infty]$
3) $[2, \infty]$
4) $[3, \infty]$

22. اگر $f: IR \to IR$ یک تابع تاق و $f(5) = 4k - 10$ و $f(-5) = k$ باشند، پس قیمت k مساوی است به:

1) $k = 2$
2) $k = -5$
3) $k = -2$
4) $k = 5$

23. هرگاه تابع $y = x^2 + 4$ در انتروال $[0, \infty)$ تعریف شده باشد، پس معکوس این تابع:

1) $y^{-1} = (4-x)^2$
2) $y^{-1} = \sqrt{x-4}$
3) $y^{-1} = \sqrt{x+4}$
4) $y^{-1} = (4+x)^2$

24. هرگاه $f(x) = |x-4| - x \cdot sgn\,(x-2)$ و $g(x) = 4 + sgn\,(x+1)$ باشد قیمت $fog(x^2)$ عبارت از:

1) -6
2) -4
3) 6
4) 4

25. هرگاه $f(x) = [|x + [|x-2|]|] + sgn\,(x-6) + x - 1$ باشد، قیمت $f(3)$ عبارت از:

1) 4
2) 5
3) 6
4) 7

26. هرگاه $f(x) = [|x-e|] + [|x+1-\pi|] + x - 3$ باشد قیمت $f(2)$ عبارت از:

1) 3
2) 2
3) -2
4) -3

.27 ساحه حل $sgn\ (x^2-3x-10)+1=0$ عبارت از:

1) $(-\infty,2)$ 2) $(5,\infty)$

3) $(-2,5)$ 4) $(-5,2)$

.28 دومین رابطه $R=\{(\sin\frac{3\pi}{2},1),(\ln 2,2),(1,2)\}$ عبارت است از:

1) $\{\sin\frac{3\pi}{2},1,2\}$ 2) $\{1,-1,\ln 2\}$ 3) $\{1,\ln 2\}$ $\{\sin\frac{3\pi}{2},1\}$

.29 اگر $R=\{(x,y),(a,b),(c,d)\}$ باشد،پس R^{-1} مساوی است به:

1) $R^{-1}=\{(c,d)\}$ 2) $R^{-1}=\{(y,x),(c,d)\}$

3) $R^{-1}=\{(y,x),(b,a),(d,c)\}$ 4) $R^{-1}=\{x,a,c\}$

.30 اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ,\ x\le 0\\ 2x-1 & ,\ x>0\end{cases}$ باشد، پس $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ مساوی است به:

1) $\frac{4}{5}$ 2) $\frac{5}{4}$ 3) $-\frac{4}{5}$ 4) $-\frac{5}{4}$

.31 اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+x}{x} & ,\ x\ne 3\\ 4 & ,\ x=3\end{cases}$ باشد، پس $f(3)$ مساوی است به:

1) 5 2) 4 3) 2 4) 3

.32 امپلیتود تابع $f(x)=\frac{5}{11}\cos\frac{13}{3}x$ عبارت است از :

1) $\frac{3}{13}$ 2) $\frac{13}{3}$ 3) $\frac{10}{22}$ 4) $\frac{5}{22}$

.33 ناحیه تعریف تابع $y=\log_{10}100$ عبارت است از :

1) $(-\infty,2)$ 2) $(0,\infty)$ 3) $(0,-\infty)$ 4) IR

.34 ناحیه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-5x}$ عبارت از:

1) $[0,\infty)$ 2) IR 3) $(-\infty,0)$ 4) $(-7,\infty)$

.35 ناحیه تعریف تابع $f(x) = \sin\left(\frac{10}{3}x\right)$ یکی از انتروال های ذیل است:

1) $(-\infty,+\infty)$ 2) $(0,\infty)$ 3) $[-1,1]$ 4) $(-1,1)$

.36 ناحیه تعریف تابع $h(x) = 3x^2 - 2x + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ عبارت است از:

1) IR 2) $IR - \{-1,+1\}$

3) $IR - \{-1\}$ 4) همه درست است

.37 اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & ,x > 1 \\ 0 & ,x = 0 \\ -2 & ,x < -1 \end{cases}$ باشد پس ناحیه تصاویر این تابع مساوی است به:

1) $\{-1,0,1\}$ 2) $\{-2,0,2\}$ 3) $\{-\infty,\infty\}$ 4) $\{0,\infty\}$

.38 ناحیه قیمت های تابع $f(x) = \left|\sin\frac{4\pi}{4}\right|$ عبارت است از:

1) $\left\{\frac{2}{\sqrt{2}}\right\}$ 2) $\{0\}$ 3) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ 4) IR

.39 ناحیه قیمت های تابع $y = \frac{\cos x}{5}$ عبارت است از:

1) $[-5,5]$ 2) $\left[0,\frac{1}{5}\right]$ 3) $\left[-\frac{1}{5},5\right]$ 4) $\left[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right]$

.40 تابع $f(x) = 3e^x$ محور y را در نقطه ذیل قطع میکند:

1) $(0,1)$ 2) $(3,0)$ 3) $(1,0)$ 4) $(0,3)$

41. تابع $y = 2\tan x$ در تمام ناحیه تعریف دارای کدام خاصیت ذیل میباشد:

1) متناقص است 2) نه متزاید ونه متناقص 3) ثابت است 4) متزاید است

42. تابع $f(x) = 33x^2$ طوریکه $(-\infty, 0)$ باشد، دارای کدام خاصیت است :

1) تابه متزاید 2) تابع یک به یک 3) تابع جفت 4)تابع طاق

43. گراف کدام یک از توابع زیر نظر به محور Y متناظر است :

$y = |x|$ (1 $y = \frac{1}{2}$ (2 $y = x$ (3 $y = \sin x$(4

44. تابع $\begin{cases} f: IR \to IR \\ f(x) = x^5 + x^3 \end{cases}$ دارای خاصیت زیر است:

1) تاق است 2) جفت است

3) نه جفت است و نه تاق است 4) متناقص است

45. معکوس تابع $f(x) = \frac{x+0.8}{x+2)5}$ عبارت است از:

$\frac{0.8-2)5x}{x-1}$ (1 $\frac{0.8+2)5x}{x+1}$ (2 $\frac{0.8-2)5x}{x+1}$ (3 $\frac{0.8+2)5x}{x-1}$ (4

46. کدام یک از توابع زیر در انتروال $(-\infty, +\infty)$ یک به یک است:

$y = |2x + 1|$ (1 $y = 2x + 10$ (2

$y = \cos x$ (3 $f(x) = \frac{99}{\sqrt{99}}x^2 + 99$ (4

47. اگر $f(x) = x^2$ و $g(x) = 1 + x$ باشد، درینصورت $(fog)(x)$ مساوی است به:

$(1 + x)^2$ (1 $1 + x^2$ (2

$x^2 - 1$ (3 $1 + (1 + x)^2$ (4

.48 $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+1}$ و $g(x)=\tan^2 x$ باشد، پس $(fog)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{8}$ 2) $-\frac{1}{2}$ 3) 2 4) 8

.49 اگر $f(x)=x^2-1$ باشد، پس $fof(x)$ مساوی است به:

1) $(x^2-1)^2$ 2) $(x^2-1)^2-1$ 3) $(1-x^2)^2$ 4) x^2-1

.50 هرگاه $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ باشد، پس $fog(x)$ عبارت است از:

1) 1 2) -1 3) $-x$ 4) x

.51 مجانب عمودی تابع $f(x)=\frac{5x+9}{0.036x-0.072}$ عبارت است از:

1) $x=2$ 2) مجانب عمودی ندارد 3) $x=0$ 4) $x=-2$

.52 مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{5x^2-x}{3x^4+14}$ عبارت است از:

1) $y=0$ 2) $x=0$

3) $x=\frac{14}{3}$ 4) مجانب افقی ندارد

.53 مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ عبارت است از:

1) $y=ax$ 2) $y=cx$

3) $y=bx$ 4) مجانب مایل ندارد

.54 در تابع $f(x)=\frac{x^2+5}{x+1}$ مجانب مایل عبارت است از:

1) $y=x+1$ 2) $x=$

3) $y=-x$ 4) $y=x-1$

.55 رأس گراف تابع $f(x) = (x+7)^2 + 10$ عبارت است از:

1) $(7,-10)$ 2) $(-2,10)$ 3) $(-7,10)$ 4) $(7,10)$

.56 نقطه $p\left(\cos\frac{15\pi}{4}, \sin\frac{15\pi}{4}\right)$ در کدام ناحیه واقع است؟

1) ناحیه چهارم 2) ناحیه سوم 3) ناحیه اول 4) ناحیه دوم

.57 در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ مجانب مایل عبارت است از:

1) 1 2) مجانب مایل ندارد 3) -1 4) صفر

.58 از انتقال عمودی گراف تابع $y = \sqrt{31}x^5$ گراف کدام یک از توابع زیر است:

1) $y = \sqrt{31}\left(x+\sqrt{31}\right)^5$ 2) $y = \sqrt{31}(x+14)^5$

3) $y = \sqrt{31}\left(x-\sqrt{31}\right)^5$ 4) $y = \sqrt{31}x^5 + 1$

.59 نقطه غیر متمادیت تابع $f(x) = \frac{\sin x}{(2x-18)^{\frac{1}{11}}}$ عبارت است از:

1) $x = 11$ 2) تابع غیر متمادی نیست

3) $x = 9$ 4) $x = -9$

.60 حاصل $sgn\left(\cos\left(\frac{88888\pi}{2}\right)\right)$ مساوی است به:

1) تعریف نشده 2) 1 4) -1 4) 0

.61 حاصل $sgn\left(-sgn\frac{100}{777}\right)$ مساوی است به:

1) -1 2) 1 4) تعریف نشده 4) 0

.62 $sgn(\cos(10007\pi))$ مساوی است به:

1) صفر 2) تعریف نشده است 3) -1 4) 1

63. حاصل $sgn\left(\cos\left(\frac{8009\pi}{2}\right)\right)$ مساوی است به:

1) 0 　　2) تعریف نشده است 　　3) -1 　　4) 1

64. هرگاه $x \in Z$ باشد و تابع $sgn\ (x^2 - 2x - 15) = -1$ باشد در این صورت $\sum x$ عبارت از:

1) 3 　　2) 5 　　3) 7 　　4) 9

فصل هفتم

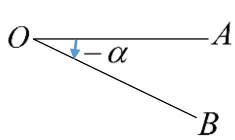
مثلثات

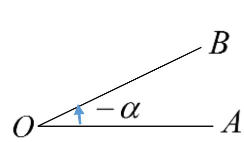
تعریف:

مثلثات از دو کلمه $Trigono$ به معنی مثلث و $Metry$ به معنی پیمایش و اندازه گیری ترکیب گردیده پس مثلثات یک بخش از علم ریاضیات بوده که با مثلث و تمام روابط که بین اضلاع و زوایای یک مثلث برقرار است بحث می نماید. که اولین مرتبه به وسیله اویلز بحیث علم مستقل بوجود آمد.

زاویه:

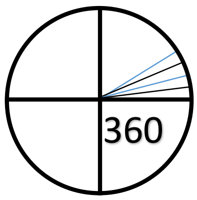
شکلی که ازتقاطع های دو شعاع بوجود می آید زاویه نامیده می شود. زاویه که هم جهت عقربه ساعت حرکت نماید زاویه منفی و هرگاه خلاف عقربه ساعت حرکت نماید مثبت نامیده می شود.





سیستم های اندازه گیری زاویه:

- **سیستم شصتی (درجه):** هرگاه یک دایره به 360 حصه مساوی تقسیم گردد هر حصه آنرا یک درجه می نامند طوریکه:



$360^\circ =$ یک دایره

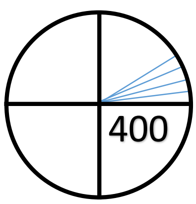
$4d =$ یک دایره

$1d = 90^\circ$

$1^\circ = 60'$

$1' = 60''$

- **سیستم صدی (گراد):** هرگاه یک دایره به 400 حصه مساوی تقسیم گردد هر حصه آنرا یک گراد می نامند، طوریکه:



$400G =$ یک دایره

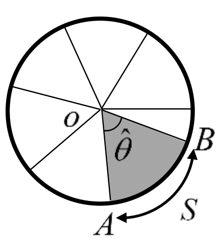
$4d =$ یک دایره

$1d = 100G$

$1G = 100'$

$1' = 100''$

- **سیستم دایروی (رادیان):** هرگاه یک دایره به 2π حصه مساوی یا 6,28 حصه مساوی تقسیم گردد هر حصه آنرا یک رادیان می نامند، طوریکه نظر به تعریف هندسی $\hat{s} = \bar{r}\cdot\hat{\theta}$ پس یک رادیان عبارت از زاویه مرکزی است که طول قوس مقابل آن مساوی به شعاع دایره باشد. اگر $\bar{r} = \hat{S}$ باشد، پس $\hat{\theta} = 1rad$

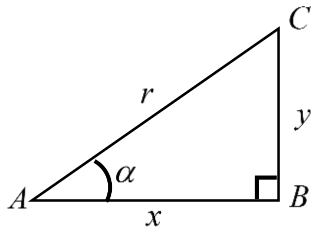


رابطه بین گراد، درجه و رادیان:

هرگاه درجه به D، گراد G و رادیان R نشان داده شود، پس رابطه آنها عبارت از:

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

نسبت های مثلثاتی: در صورتیکه $0 < \alpha$ یک زاویه، y ضلع مقابل و x ضلع مجاور این زاویه و r وتر مثلث قایم زاویه را نشان دهد، نسبت های مثلثاتی زاویه α قرار ذیل تعریف گردیده است:



رابطه بین نسبت های مثلثاتی:

1) $\left.\begin{array}{l} Sin\alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha} \\ \csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} \end{array}\right\} => \sin\alpha \cdot \csc\alpha = 1$

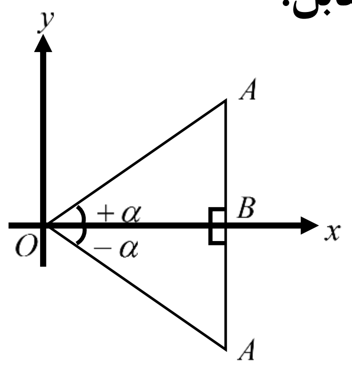
2) $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \end{array}\right\} => \cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$

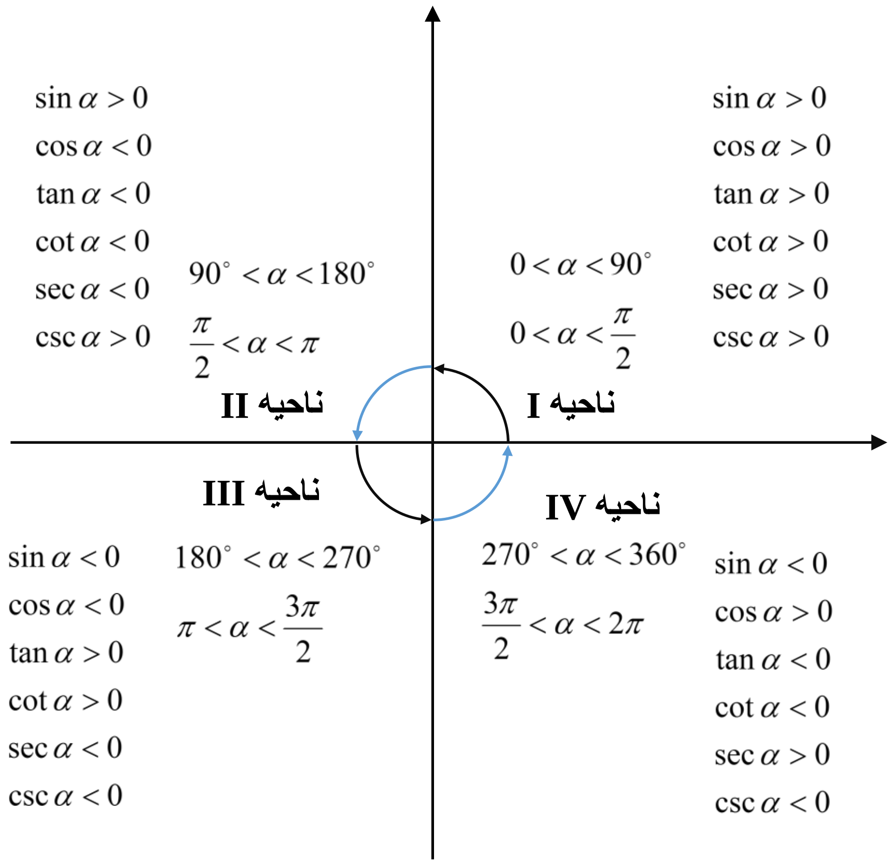
3) $\left.\begin{array}{l} \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} \\ \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} \end{array}\right\} => \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ، $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

نسبت های مثلثاتی زاویه های متقابل:

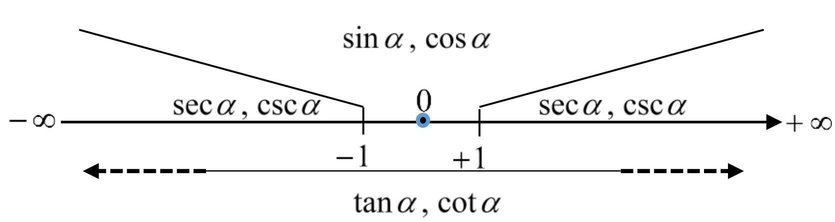
1) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
2) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
3) $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
4) $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$
5) $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$
6) $\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$





نسبت های مثلثاتی	ناحیه I	ناحیه II	ناحیه III	ناحیه IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–
$\sec\alpha$	+	–	–	+
$\csc\alpha$	+	+	–	–

ساحه تحول نسبت های مثلثاتی: طوریکه از مطالعه علم الجبر در تحول توابع مثلثاتی می دانیم نسبت های مثلثاتی روی خط اعداد دارای ساحه تحول ذیل می باشند.

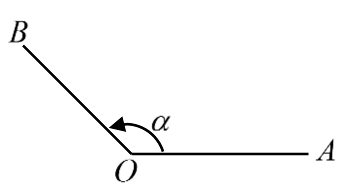


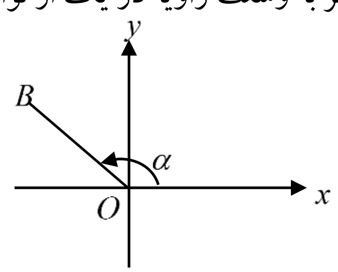
$$1)\quad -1 \le \sin\alpha, \cos\alpha \le +1 \Rightarrow \sin\alpha, \cos\alpha \Rightarrow [-1,+1]$$
$$2)\quad -\infty \le \tan\alpha, \cot\alpha < +\infty \Rightarrow \tan\alpha, \cot\alpha \Rightarrow (-\infty,+\infty)$$
$$3)\quad +1 \le \sec\alpha, \csc\alpha \le -1 \Rightarrow \sec\alpha, \csc\alpha \Rightarrow (-\infty,-1] \cup [+1,+\infty)$$

دریافت نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا: جهت دریافت نسبت مثلثاتی زوایای $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ و 90° به یک روش ساده می توان از جدول ذیل استفاده نمود:

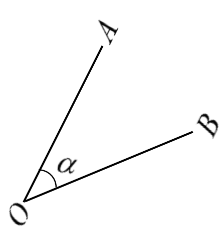
$\sin\alpha \rightarrow$	0°	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	
	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	
	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	0°	$\leftarrow \cos\alpha$

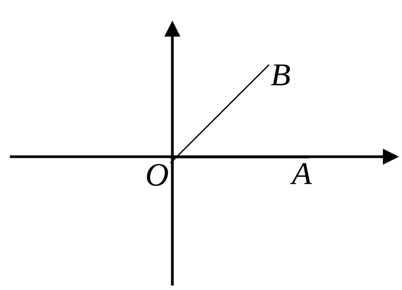
حالت استندرد (معیاری) یک زاویه: هرگاه ضلع ابتدائی یک زاویه بالای محور x رأس زاویه و مبدأ کمیات وضعیه و ضلع نهائی آن نظر به وسعت زاویه در یک از نواحی کمیات قرار گیرد زاویه استندرد گفته می شود. مثلاً:





زوایای کوتر مینل (Conterminal Angles): زوایای معیاری که ضلع نهائی آن بعد n دور یک دایره بالای هم منطبق گردد زوایای کوترمینل نامیده میشود.مثلاً:





دریافت نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایا به کمک زوایای نواحی کمیات وضعیه:

درحالیکه α یک زاویه حاده مثبت است می توان به کمک زوایای نواحی کمیات وضعیه نسبت های مثلثاتی زوایای $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ, 420^\circ, \ldots$ را در دو حالت ذیل دریافت نمود:

حالت اول: در حالیکه $n = 1,2,3,\ldots$ است، داریم که:

$$1)\ \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \cos\alpha$$

$$2)\ \cos\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \sin\alpha$$

$$3)\ \tan\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \cot\alpha$$

$$4)\ \cot\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \tan\alpha$$

$$5)\ \sec\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \csc\alpha$$

$$6)\ \csc\left[\frac{(2n-1)\pi}{2} \pm \alpha\right] = \sec\alpha$$

اشاره نتایج نسبت های مذکور مربوط به ناحیه آن می گردد.

حالت دوم: در حالیکه $n = 1,2,3,\ldots$ است داریم که:

$$1)\ \sin(n\pi \pm \alpha) = \sin\alpha$$

$$2)\ \cos(n\pi \pm \alpha) = \cos\alpha$$

$$3)\ \tan(n\pi \pm \alpha) = \tan\alpha$$

$$4)\ \cot(n\pi \pm \alpha) = \cot\alpha$$

$$5)\ \sec(n\pi \pm \alpha) = \sec\alpha$$

$$6)\ \csc(n\pi \pm \alpha) = \csc\alpha$$

اشاره نتایج نسبت های مذکور مربوط به ناحیه آن می گردد.

یادداشت: جهت دریافت نسبت های مثلثاتی 180° با استفاده از متضاد نسبت های مثلثاتی و 0° و برای دریافت نسبت های مثلثاتی 360° با استفاده از مساوی بودن نسبت مثلثاتی 0° می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sin 0^\circ = \sin 360^\circ = 0 \Rightarrow \sin 180^\circ = 0\\
&\cos 0^\circ = \cos 360^\circ = +1 \Rightarrow \cos 180^\circ = -1\\
&\tan 0^\circ = \tan 360^\circ = 0 \Rightarrow \tan 180^\circ = 0\\
&\cot 0^\circ = \cot 360^\circ = \infty \Rightarrow \cot 180^\circ = -\infty\\
&\sec 0^\circ = \sec 360^\circ = +1 \Rightarrow \sec 180^\circ = -1\\
&\csc 0^\circ = \csc 360^\circ = \infty \Rightarrow \csc 180^\circ = -\infty
\end{aligned}$$

به همین ترتیب جهت دریافت نسبت های مثلثاتی 270° با استفاده از متضاد نسبت های مثلثاتی 90° می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
&\sin 90^\circ = +1 \Rightarrow \sin 270^\circ = -1\\
&\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \cos 270^\circ = 0\\
&\tan 90^\circ = \infty \Rightarrow \tan 270^\circ = -\infty\\
&\cot 90^\circ = 0 \Rightarrow \cot 270^\circ = 0\\
&\sec 90^\circ = \infty \Rightarrow \sec 270^\circ = -\infty\\
&\csc 90^\circ = +1 \Rightarrow \csc 270^\circ = -1
\end{aligned}$$

رابطه اساسی و روابط فرعی مثلثاتی:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \} \quad \text{رابطه اساسی مثلثاتی}$$

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\\
&2)\quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha\\
&3)\quad \tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1\\
&4)\quad \cot^2\alpha = \csc^2\alpha - 1\\
&5)\quad \sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1\\
&6)\quad \csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1
\end{aligned}\right\} \quad \text{روابط فرعی مثلثاتی}$$

نسبت های حاصل جمع و حاصل تفریق زوایا: در حالیکه α و β دو زاویه حاده مثبت اند. نسبت های حاصل جمع و حاصل تفریق زوایا قرار ذیل اند.

$$\begin{aligned}
&1)\quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta\\
&2)\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta\\
&3)\quad \sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}
\end{aligned}$$

نسبت های مثلثاتی دو چند یک زاویه:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

2) $\begin{cases}\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1\end{cases}$

3) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

نسبت های مثلثاتی سه چند یک زاویه:

1) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

2) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 4\cos\alpha$

3) $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$

نسبت های مثلثاتی $(\alpha+\beta+\gamma)$:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
$$+\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma$$
$$+\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\cdot\tan\alpha-\tan\alpha\cdot\tan\gamma} \quad \ldots\ldots(3)$$

فورمول های تحویل یا ضرب:

1) $\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

2) $\sin x - \sin y = 2\sin\dfrac{x-y}{2}\cos\dfrac{x+y}{2}$

3) $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

4) $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

5) $\tan x - \tan y = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$

6) $\tan x - \tan y = \dfrac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$

به همین ترتیب برای حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا به حاصل جمع یا تفریق با استفاده از فورمول تحویل می توان چنین نوشت:

1) $\sin A \cdot \cos \beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$

2) $\cos A \cdot \sin \beta = \dfrac{1}{2}\left[\sin(A+B)-\sin(A-B)\right]$

3) $\cos A \cdot \cos \beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$

4) $\sin A \cdot \sin \beta = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(A+B)-\cos(A-B)\right]$

نسبت های مثلثاتی یک زاویه از جنس tan نصف زاویه:

1) $\sin = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ همچنان

2) $\cos = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

3) $\tan = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس sin همان زاویه:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}$ همچنان

2) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{2}$ همچنان

3) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}}$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}}{\sqrt{1+\sin 2\alpha}-\sqrt{1-\sin 2\alpha}}$ همچنان

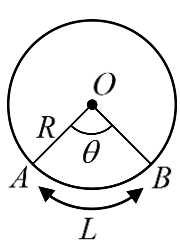
نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس cos همان زاویه:

1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ و همچنان

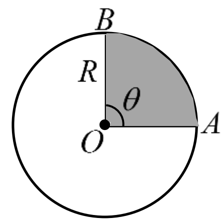
2) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

3) $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$

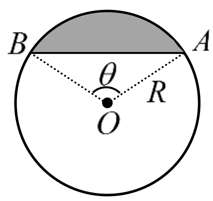
محاسبه طول قوس یک دایره: هرگاه R شعاع یک دایره و θ زاویه مرکزی مقابل قوس L دایره از جنس درجه داده شده باشد، طول قوس آن عبارت از: $L=\pi R\cdot\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$ و در صورتیکه θ زاویه مرکزی از جنس رادیان باشد، پس: $L=R\cdot\theta$



مساحت قطاع دایره: قسمتی از سطح دایره که میان دو شعاعات دایره قرار داشته باشد قطاع دایره نامیده می شود که مساحت آن عبارت از: $A_{sector} = \frac{1}{2} R^2 \theta$

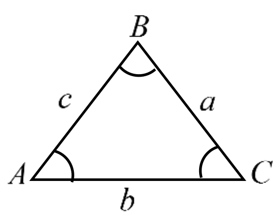


مساحت قطعه دایره: قسمتی از سطح دایره که بین قوس و وتر دایره قرار داشته باشد قطعه دایره نامیده می شود که مساحت آن عبارت از: $A_{segmnt} = \frac{1}{2} R^2 \left(\theta - \sin\theta\right)$



مساحت مثلث که دو ضلع و زاویه بین آن معلوم باشد: هرگاه b, a و c اضلاع مثلث و B, A و C زوایای آن نشان دهد، مساحت آن عبارت از:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C \qquad S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin B \qquad S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin A$$



نسبت های مثلثاتی نصف زاویه از جنس طول اضلاع مثلث: در صورتیکه b, a و c و طول اضلاع یک مثلث و $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ را نشان دهد، پس داریم که:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$$

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

همچنان:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$
$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$
$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

به همین ترتیب:

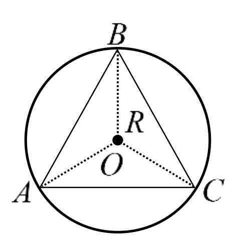
$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$
$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

به همین ترتیب مساحت یک مثلث از جنس اضلاع از رابطه ذیل بدست می آید:

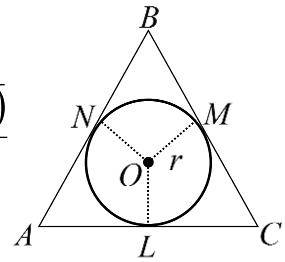
(فورمول هیرون) ...... $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

دریافت شعاع دایره محیطی یک مثلث: دایره که از رأس های یک مثلث عبور نماید طوریکه مثلث در داخل دایره قرار داشته باشد، و مرکز دایره محیطی مثلث نقطه تقاطع ناصف های عمودی مثلث می باشد، که طول شعاع این دایره در صورتیکه b,a و c طول اضلاع مثلث و s مساحت باشد عبارت از:

$R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{c}{2\sin C}$ یا $R=\dfrac{abc}{4S}$

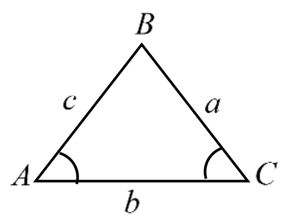


دریافت شعاع دایره محاطی یک مثلث: دایره که در داخل یک مثلث قرار داشته و به هر سه ضلع مثلث مماس باشد دایره محاطی مثلث نامیده می شود که مرکز این دایره در نقطه تقاطع ناصف الزاویه مثلث مذکور قرار دارد. در حالیکه b,a و cطول اضلاع و p نصف محیط مثلث باشد شعاع دایره محاطی مثلث مذکور از رابطه ذیل بدست می آید:



$$r = \frac{S}{p} \quad \text{یا} \quad r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

قضیه ساین: در هر مثلث (حاده الزاویه، قایم الزاویه و منفرجه الزاویه) رابطه بین اضلاع و زوایای یک مثلث از جنس نسبت مثلثاتی ساین عبارت از:



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

قضیه (فورمول های مُلوید Mollwied): با استفاده از قضیه ساین می توان دو رابطه ذیل را دریافت نمود که بنام فورمول مُلوید یاد می گردند عبارت اند از:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdots\cdots\cdots(2)$$

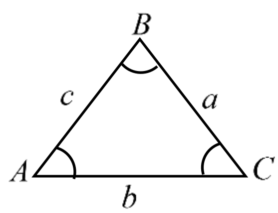
قضیه کوساین:

در هر مثلث (حاده الزاویه، قایم الزاویه و منفرجه الزاویه) رابطه بین اضلاع و زوایای یک مثلث از جنس نسبت مثلثاتی کوساین قرار ذیل اند:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

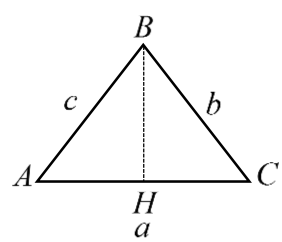
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2bc}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2bc}$$

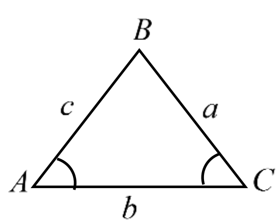


به همین ترتیب در رابطه بین اضلاع و زویای یک مثلث قضایای ذیل نیز وجود دارد، با در نظر داشت خط ارتفاع در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ می توان روابط ذیل را نوشت:

$$a=c\cos B+b\cos C$$
$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=a\cos B+b\cos A$$



قضیه تانجانت: در هر مثلث(حاده الزاویه، قایمه زاویه و منفرجه الزاویه) رابطه بین اضلاع و زوایای مثلث از جنس نسبت مثلثاتی تانجنت عبارت از:



$$\frac{a+b}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مطابقت های مثلثاتی: آن مساوات مثلثاتی که برای تمام قیمت های زوایا هر دو طرف مساوات با هم مساوی باشد مطابقت مثلثاتی نامیده می شود، مثلاً در مطابقت $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$ هر قیمت را که زاویه α بگیرید هر دو طرف مساوات با هم مساوی است، که با استفاده ار روابط و فورمول های که قبلاً در مثلثات آنها را مطالعه نمودیم می توان مطابقت های مثلثاتی را ساده نمود و قیمت عینیتی آنها را دریافت کرد.

معادلات مثلثاتی: آن مساوات مثلثاتی که برای بعضی از قیمت های زوایا صدق نماید، معادلات مثلثاتی نامیده می شود که می توان معادلات مثلثاتی را در شکل یک مجهوله درجه اول، یک مجهوله درجه دوم و سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ملاحظه نمود که هر کدام آنها مانند معادلات الجبری به شیوه ها و طریقه های خاصی قابل حل می باشد.

به خاطر داشته باشید که در معادلات مثلثاتی $a\sin x+b\cos x=c$ شرط حل آن $a^2+b^2\geq c^2$ می باشد.

شرایط حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول مثلثاتی: سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی به شش گروپ تقسیم گردیده که هر کدام آنها شرایط حل به خصوص خویش را دارا می باشند که عبارت اند از:

گروپ اول : $\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$ و $\begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$

که شرط حل آنها عبارت از: $a^2-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\leq 0$

گروپ دوم: $\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\cos\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\sin\cdot\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$

که شرط حل آنها عبارت از: $-\cos^2\dfrac{\alpha}{2}\leq a\leq\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

گروپ سوم: $\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases},\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$

که شرایط حل آنها عبارت از: $\tan\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a-1}{a+1}\tan\dfrac{\alpha}{2}$ یا $\tan\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{a-1}{a+1}\cot\dfrac{\alpha}{2}$

گروپ چهارم:
$$\begin{cases}\tan x \pm \tan y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases} , \begin{cases}\cot x \pm \cot y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

که شرط حل آن عبارت از: $a^2 - 4 + 4a \cdot \cot\alpha \geq 0$

گروپ پنجم:
$$\begin{cases}\tan x \cdot \tan y = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

که شرط حل آن $-1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cdot \cos\alpha \leq 1$ می باشد.

گروپ ششم:
$$\begin{cases}\frac{\tan x}{\tan y} = a \\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

که شرط حل آن عبارت از $-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin\alpha \leq 1$ می باشد.

تبصره: جهت دریافت زوایای کوترمینل در حل معادلات مثلثاتی سه حالت ذیل را در نظر داشته باشید.

حالت اول: برای زوایای که دارای نسبت های مثلثاتی $\sin x$ و $\csc x$ می باشند، فورمول عمومی ذیل وجود دارد:

$$x = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha \quad ، \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

و یا به عباره دیگر می توان برای $\sin x$ و $\csc x$ طور ذیل نیز نوشت:

$$x = 2n\pi + \alpha \quad , \quad x = \pi + 2n\pi - \alpha \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

حالت دوم: برای زوایای که دارای نسبت های مثلثاتی $\cos x$ و $\sec x$ می باشند، فورمول عمومی ذیل وجود دارد:

$$x = 2n\pi \pm \alpha \quad ، \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

حالت سوم: برای زوایای که دارای که نسبت های مثلثاتی $\tan x$ و $\cot x$ می باشند، فورمول ذیل وجود دارد:

$$x = n\pi + \alpha \quad , \quad n = 0,1,2,3,\ldots$$

توابع معکوس مثلثاتی

با در نظر داشت تعریف معکوس برای توابع معکوس مثلثاتی می توان چنین ارائه نمود.

$$y = f(x) \Rightarrow \qquad x = f^{-1}(y)$$

$$y=\sin(x) \quad \Rightarrow \quad x=\sin^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x=\arcsin y$$
$$y=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad x=\cos^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x=\arccos y$$
$$y=tg(x) \quad \Rightarrow \quad x=tg^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad x=\arcsin y$$

مثلاَ:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=30$$
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=45$$
$$tg\,\frac{3\pi}{4}=-1 \quad \Rightarrow \quad \arcsin(-1)=\frac{3\pi}{4}$$

همچنان جهت ساده سازی توابع معکوس مثلثاتی حالات ذیل را در نظر داشته باشد:

$$\begin{aligned} &\arcsin(\cos x)=x \\ 1)\quad &\arccos(\cos x)=x \\ &arctg\,(tgx)=x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sin(\arcsin x)=x \\ 2)\quad &\cos(\arccos x)=x \\ &tg(arctgx)=x \end{aligned}$$

3) $\arcsin x=\arccos x=\frac{\pi}{2}$

4) $\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}=arctg\,\frac{x}{\sqrt{x-x^2}}$

5) $arctgx=arc\cot g\,\frac{1}{x}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6) $arctgx+arc\cot x=\frac{\pi}{2}$

7) $\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}=arctg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $arc\cot x=-arc\cot(-x)$

9) $arctgx-arctgy=arctg\,\frac{x-y}{1+xy}$

سوالات

1. اگر $\sin\theta > 0$ و $\cos\theta < 0$ باشد،پس زاویه θدر ناحیه ذیل واقع است:

4(1　　3 (2　　2 (3　　1 (4

2. هر گاه زاویه مرکزی$\frac{3\pi}{2}$ و طول قوس مقابل $\frac{8\pi}{2}cm$ باشد،پس شعاع دایره مساوی است به:

$\frac{8}{3}cm$ (1　　$\frac{5}{3}cm$(2　　$\frac{3}{8}cm$(3　　$\frac{3}{5}cm$(4

3. در حالت معیاری با زاویه $200°$ کدام زاویه زیر کوترمینل میباشد:

$2620°$ (1　　$2820°$ (2　　$2720°$ (3　　$2800°$ (4

4. هرگاه $\sin x = \frac{1}{2}$ و ضلع دوم زاویه x در ناحیه دوم باشد، پس قیمت $2\cos x$ مساوی است به:

$-\sqrt{2}$ (1　　$\sqrt{2}$ (2　　$-\sqrt{3}$ (3　　$\sqrt{3}$ (4

5. هرگاه $\sec(-\theta) = a$ باشد در این صورت $\cos(\pi+\theta)$ مساوی است به:

$\frac{1}{a}$ (1　　$-\frac{1}{a}$ (2　　$-a$ (3　　a (4

6. افاده $\frac{\sin 300°}{1-\cos 240°}$ عبارت است از:

$-\sqrt{3}$ (1　　$\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (2　　-1 (3　　$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4

7. افاده مثلثاتی $\frac{sec(-\theta)+sec\theta}{\sec(-\theta)}$ مساوی است به:

0 (1　　2 (2　　1 (3　　-2 (4

8. افاده مثلثاتی $\cot(4\pi - \sigma)$ مساوی است به:

1) $\cot\sigma$ 2) $-\cot\sigma$ 3) $-\tan\sigma$ 4) $\tan\sigma$

9. اگر $\frac{\pi}{2} < a < \beta < \pi$ باشد، پس کدام یکی از روابط زیر درست است:

1) $\tan a \cdot \tan\beta = 0$ 2) $\tan a \cdot \tan\beta \geq 0$

3) $\tan a \cdot \tan\beta < 0$ 4) $\tan a \cdot \tan\beta > 0$

10. قیمت $\cot(450° + \theta)$ مساوی است به:

1) $\tan\theta$ 2) $-\tan\theta$

3) $\cot\theta$ 4) $-\cot\theta$

11. به کدام یکی از قیمت های ذیل $\cot(4x)$ تعریف نشده است:

1) $x = \frac{\pi}{8}$ 2) $x = \frac{\pi}{4}$ 3) $x = -\frac{\pi}{8}$ 4) $x = \frac{\pi}{3}$

12. هرگاه $\sin a \cdot \cos a > 0$ و $\cos a \cdot \tan a < 0$ باشد پس ضلع دوم زاویه a در کدام ناحیه واقع است:

1) ناحیه اول 2) ناحیه سوم

3) ناحیه دوم 4) ناحیه چهارم

13. زاویه کوترمینل با زاویه $\frac{\pi}{8}$ عبارت است از:

1) $33\frac{\pi}{8}$ 2) $32\frac{\pi}{8}$ 3) $20\frac{\pi}{8}$ 4) $31\frac{\pi}{8}$

14. حاصل افاده مثلثاتی $\sin 27 + \cos 63$ مساوی است به:

0(1 $2\sin 27$ (2 $2\cos 50$ (3 $\cos 50$ 4)

.15 $\sqrt{96}\frac{\sin x}{\csc x}+4\sqrt{6}\frac{\cos x}{\sec x}$ مساوی است به:

$\sqrt{97}$ (1 $\sqrt{98}$ (2 $\sqrt{99}$(3 $\sqrt{96}$(4

.16 $-3\cot^2 x-3$ مساوی است به:

$-\csc^2 3x$ (1 $-\sec^2 x$ (2

$-\sec^2 3x$ (3 $-3\csc^2 x$ (4

.17 حاصل فاده $\frac{4}{2\cot^2\frac{\pi}{8}}+2$ مساوی است به:

$2\csc^2\frac{\pi}{8}$ (1 $2\tan^2\frac{\pi}{8}+1$ (2

$\sec^2\frac{\pi}{8}$ (3 $2\sec^2\frac{\pi}{8}$ (4

.18 حاصل افاده $\frac{\tan(\sqrt{24})-\sin(\sqrt{24})}{2\tan(\sqrt{24})}$ مساوی است به:

$\cos^2\sqrt{6}$ (1 $\sin^2\sqrt{6}$ (2

$\sin(\sqrt{24})$ (3 $\cos(\sqrt{24})$ (4

.19 حاصل افاده $(3cot\sqrt{27}+3tan\sqrt{27})(3\sin\sqrt{27}+3cos\sqrt{27})$ مساوی است به:

$\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (1 $\frac{9}{\sin(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$(2

$\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (3 $\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ (4

.20 حاصل افاده مثلثاتی $(\tan\sqrt{7}+1)(\tan\sqrt{7}-1)(1-\sin^2\sqrt{7})$ مساوی است به:

$\sin^2\sqrt{7}$ (1 $\cos^2\sqrt{7}$ (2

3) $sin\sqrt{7}-\cos\sqrt{7}$ 4) $\sin^2\sqrt{7}-\cos^2\sqrt{7}$

.21 حاصل افاده $\sec\frac{5}{13}\left(1+\sin\frac{5}{13}\right)+\cos\frac{5}{13}\left(1+\sin\frac{5}{13}\right)^{-1}$ مساوی است به:

1) $-\frac{2}{\cos\frac{5}{13}}$ 2) $-\frac{2}{\sin\frac{5}{13}}$ 3) $\frac{2}{\cos\frac{5}{13}}$ 4) $\frac{2}{\sin\frac{5}{13}}$

.22 افاده مثلثاتی $\sin^6 x+\cos^6 x$ مساوی است به:

1) $1-2\sin^2 x\cos^2 x$ 2) $1+2\sin^2 x\cos^2 x$

3) $1-3\sin^2 x\cos^2 x$ 4) $1+3\sin^2 x\cos^2 x$

.23 $\cos^2(\cos 99\pi)$ مساوی است به:

1) $\cos^2(-1)$ 2) $\cos(-1)$

3) $\cos^2(1)$ 4) هیچکدام

.24 حاصل افاده $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos40^\circ}}$ عبارت از:

1) $cos10$ 2) $\frac{1}{2}cos10$

3) $2\,cos10$ 4) $1+cos10$

.25 هرگاه x زاویه حاده باشد، درینصورت افاده $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x}}$ 2) $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$

3) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}$ 4) $\frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}$

.26 افاده مثلثاتی $\tan 39^\circ$ مساوی است به:

(1 $\dfrac{\sin 6^\circ - \cos 6^\circ}{\sin 6^\circ + \cos 6^\circ}$ (2 $\dfrac{\cos 6^\circ - \sin 6^\circ}{\sin 6^\circ - \cos 6^\circ}$

(3 $\dfrac{\cos 6^\circ - \cos 84^\circ}{\sin 6^\circ + \cos 84^\circ}$ (4 $\dfrac{\sin 84^\circ - \sin 6^\circ}{\sin 84^\circ + \sin 6^\circ}$

27. در صورتیکه A، B و C زوایای داخلی یک مثلث باشد انگاه $tgA + tgB + tgC$ مساوی میشود به:

(1 $tgA \cdot tgB \cdot tgC$ (2 $tgA \cdot tgC$

(3 $tgA \cdot tgB$ (4 $tgB \cdot tgC$

28. $sin(A+B)sin(A-B)$ عبارت از:

(1 $sin^3A - sin^3B$ (2 $sin^2A - sin^2B$

(3 $sin^2A + sin^2B$ (4 $sin^3A + sin^3B$

29. در صورتیکه $\propto \neq \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ باشد افاده مثلثاتی $\frac{cos3\propto + sin\propto sin2\propto}{sin3\propto - sin2\propto cos\propto}$ عبارت است از:

(1 $tan \propto$ (2 $cot \propto$

(3 $tan3 \propto$ (4 $cot3 \propto$

30. $\dfrac{1}{\sec 22^\circ \cdot \sin 31^\circ \cdot \cos 53^\circ}$ مساوی است به:

(1 $\frac{1}{2}\sec 22^\circ \cdot \sin 84^\circ$ (2 $\tan 22^\circ + \cos 53^\circ$

(3 $2\sec 22^\circ \cdot \cos^2 53^\circ$ (4 $\tan 53^\circ + \cot 31^\circ$

31. افاده مثلثاتی $\csc 10^\circ - \sqrt{3}\sec 10^\circ$ مساوی است به:

(1 4 (2 $\frac{1}{2}$ (3 2 (4 1

32. قیمت افاده $\tan 15° + \cot 15°$ عبارت از:

(1 $2-\sqrt{3}$ (2 $4+2\sqrt{3}$ (3 $4-2\sqrt{3}$ (4 4

33. افاده مثلثاتی $\frac{\sqrt{3}}{sin80}-\frac{1}{cos80}$ عبارت از:

1) 4 2) 3 3) 2 4) 1

34. عدد $tan15-cot15$ عبارت از:

1) $-2\sqrt{3}$ 2) $-2\sqrt{2}$ 3) $-\sqrt{3}$ 4) $2\sqrt{3}$

35. حاصل ضرب افاده $(sin45)(sin46)(sin47)\ldots(sin312)$ عبارت از:

1) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 2) 0 3) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

36. قیمت $cotg\left(2arctan\frac{3}{4}\right)$ عبارت از:

1) $\frac{9}{16}$ 2) $\frac{7}{24}$ 3) $\frac{25}{24}$ 4) $\frac{24}{25}$

37. افاده $\frac{sin^2a}{1+cotg^2a}+\frac{cos^2a}{1+tan^2a}$ عبارت از:

1) $2sin^2a\,cos^2a-1$ 2) $1-2sin^2a\,cos^2a$

3) $1-3sin^2a\,cos^2a$ 4) $3sin^2a\;cos^2a-1$

38. $4\cos 18°-3\sec 18°-2\tan 18°$ مساوی است به:

1) صفر 2) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 4) 1

39. $\csc 10°-\sqrt{3}\sec 10°$ مساوی است به:

1) 1 2) $\frac{1}{2}$ 3) 2 4) 4

40. اگر $\cos\propto+\cos\theta=m$ و $\sin\propto+\sin\beta=n$ باشد پس $\sin(\propto+\beta)$ مساوی است به:

1) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$
2) $\frac{n^2-m^2}{m^2+n^2}$
3) $\frac{2mn}{m^2+n^2}$
4) $\frac{2mn}{m^2-n^2}$

41. نقطه تقاطع $y=\sin x+2$ با محور y عبارت است از:

1) $(2,0)$
2) $(0,2)$
3) $(1,1)$
4) $(-1,-1)$

42. اگر $\begin{cases} tan\ x+cot\ x=a \\ tan^3x+cot^3x=b \end{cases}$ باشد پس :

1) $b=3a-a^3$
2) $b=a^3+3a$
3) $b=a^3-3a$
4) $b=a-3a^3$

43. اگر B,A و C زوایای یک مثلث b,a و c طول اضلاع مقابل آن باشد، پس $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}$ مساوی است به:

1) $2\frac{b}{\sin B}$
2) $\frac{\sin B}{b}$
3) $\frac{b}{\sin 2B}$
4) $\frac{b}{\sin B}$

44. اگر در مثلث ABC، $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ طوریکه bو c طول اضلاع مقابل زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و $\hat{A}=90°$ باشد ، پس وسعت زاویه $\hat{B}$ مساوی است به:

1) $70°$
2) $45°$
3) $30°$
4) $75°$

45. اگر B,A و C زوایای داخلی یک مثلث و $a\ ,b$ و c بالترتیب طول اضلاع مقابل آن باشد پس $\frac{a+\sin A}{\sin A}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin B}{b+\sin B}$
2) $\frac{\sin B}{b-\sin B}$
3) $\frac{b+\sin B}{\sin B}$
4) $\frac{b}{\sin B}$

اگر $\frac{\sin x}{a}=\frac{\cos x}{b}=k$ باشد، پس $k(a+b)$ مساوی است به:

1) $(1-\sin 2x)^{\frac{1}{2}}$ 2) $1+\sin 2x$ 3) $(1+\sin 2x)^{\frac{1}{2}}$ 4) هیچکدام

.46 $\frac{1}{\sec 18\cdot\sin 3\cdot\cos 21}$ مساوی است به:

1) $\tan 21-\tan 3$ 2) $\tan 3-\tan 21$

3) $\cot 21+\tan 21$ 4) $\cot 3+\tan 21$

.47 در حالت معیاری با زاویه $23°$ کدام زاویه زیر کوترمینل میباشد:

1) $7423°$ 2) $7223°$ 3) $7323°$ 4) $7123°$

.48 حاصل افاده $\frac{\tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})-\sin(\sqrt{2}+\sqrt{8})}{2\tan(\sqrt{2}+\sqrt{8})}$ مساوی است به:

1) $1+\sin^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ 2) $1+\cos^2\frac{\sqrt{18}}{2}$

3) $1-\sin^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ 4) $1-\cos^2\frac{\sqrt{18}}{2}$

.49 حاصل افاده $\left(3\cot\sqrt{27}+3\tan\sqrt{27}\right)\left(3\sin\sqrt{27}+3\cos\sqrt{27}\right)$ مساوی است به:

1) $\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ 2) $\frac{9}{\sin(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$

3) $\frac{9}{\sin(3\sqrt{3})}-\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$ 4) $\frac{9}{\csc(3\sqrt{3})}+\frac{9}{\cos(3\sqrt{3})}$

.50 افاده مثلثاتی $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$ مساوی است به:

1) 0 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$

.51 افاده مثلثاتی $\cos^2\frac{x}{10}-\sin^2\frac{x}{10}$ مساوی است به:

1) $\sin\frac{x}{5}$ 2) $\sin\frac{x}{10}$ 3) $\cos\frac{x}{10}$ 4) $\cos\frac{x}{5}$

.52 حاصل افاده $\frac{\sin 12\theta}{\cos 8\theta} - \frac{\cos 12\theta}{\sin 8\theta}$ مساوی است به:

1) $\frac{\cos 20\theta}{\sin 16\theta}$ 2) $\frac{2\cos 20\theta}{\sin 16\theta}$ 3) $\frac{\cos 20\theta}{\sin 8\theta}$ 4) $\frac{\cos 20\theta}{\cos 8\theta}$

.53 اگر $a = 60°$ باشد $2\sin^2\frac{a}{2}\cdot\cos^2\frac{a}{2}$ مساوی است به:

1) $\frac{5}{8}$ 2) $\frac{7}{8}$ 3) $\frac{1}{8}$ 4) $\frac{3}{8}$

.54 $\frac{1}{\sec 18\cdot\sin 30\cdot\cos 21}$ مساوی است به:

1) $\tan 21 - \tan 3$ 2) $\tan 3 - \tan 21$

3) $\cot 21 + \tan 21$ 4) $\cot 3 + \tan 21$

.55 اگر $a \neq 0$ و $\cot 18° = n$ باشد در این صورت $\tan 36°$ مساوی است به:

1) $\frac{2n}{n^2+1}$ 2) $\frac{2n}{n^2-1}$ 3) $\frac{1}{n}$ 4) $-\frac{1}{n}$

.56 افاده مثلثاتی $\sin^2 x\cos^2 x\,(2+\tan^2 x+\cot^2 x)$ مساوی است به:

1) 2 2) 0 3) 1 4) -1

.57 افاده $2 - 2cos^2 4$ عبارت از ؟

1) $cosec^2 4$ 2) $2sec4$ 3) $\frac{2}{sec4}$ 4) $\frac{2}{cosec4}$

.58 $cos^2 25$ مساوی است به :

1) $0{,}5 + 0{,}5cos50$ 2) $cosec^2 25$

3) $1 + cos^2 25$

4) $0,5 - 0,5cosec\ 50$

.59 اگر $\cos\theta = \frac{4}{5}$ باشد و ضلع دوم زاویه در ربع اول قرار داشته باشد. قیمت $2\tan\frac{\theta}{2}$ عبارت است از:

1) 7

2) $\frac{3}{2}$

3) $\frac{1}{3}$

4) $\frac{2}{3}$

.60 افاده مثلثاتی $\cos 70° + \cos 20°$ مساوی است به:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25°$

2) $-\sqrt{2}\cos 25°$

3) $\sqrt{2}\cos 25°$

4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25°$

.61 افاده مثلثاتی $\frac{2\tan 25°}{1+\tan^2 25°}$ مساوی است به:

1) $\tan 50°$

2) $\cot 50°$

3) $\cot 25°$

4) $\tan 25°$

.62 حاصل افاده $\frac{\cos(80\alpha)}{\cos(40\alpha)+\sin(40\alpha)}$ مساوی است به:

1) 1

2) $\sin(40\alpha) - \cos(40\alpha)$

3) $\cos(40\alpha) + \sin(40\alpha)$

4) $\cos(40\alpha) - \sin(40\alpha)$

.63 حاصل افاده $\frac{8}{\sec(10-\sqrt{8})\cos 10.\sin\sqrt{8}}$ مساوی است به:

1) $8\tan 10 + 8\cot\sqrt{8}$

2) $-8\tan 10 - \cot\sqrt{8}$

3) $-8\tan 10 + 8\cot\sqrt{8}$ 4) $-8\tan 3 - \cot\sqrt{8}$

.64 اگر $z = \sin\frac{\pi}{2}i + \cos\frac{\pi}{2}$ باشد، پس z^{10} مساوی است به:

1) $-i$ 2) -1 3) 1 4) i

.65 افاده مثلثاتی $\frac{\sin x}{\cot x - \csc x} - \frac{\sin x}{\cot x + \csc x}$ مساوی است به:

1) -2 2) 1 3) -1 4) 2

.66 اگر $\sin\theta + \cos\theta = a$ باشد، پس $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ مساوی است به:

1) $\frac{a}{2}(a^2 - 3)$ 2) $a(a^2 - 2)$

3) $\frac{a}{2}(3 - a^2)$ 4) $\frac{a}{2}(a^2 + 2)$

.67 قیمت افاده $\frac{\cos 25°}{\sin 15° \cdot \cos 40°}$ مساوی است به:

1) $\tan 40° + \cot 15°$ 2) $\tan 40° - \cot 15°$

3) $\tan 15° + \cot 40°$ 4) هیچکدام

.68 حاصل افاده $\frac{\sin(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{12})}{\cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{12}}$ مساوی است به:

1) $\tan\frac{\pi}{8} - \tan\frac{\pi}{12}$ 2) $\tan\frac{\pi}{8} + \tan\frac{\pi}{12}$

3) $\cot\frac{\pi}{8} + \cot\frac{\pi}{12}$ 4) $\cot\frac{\pi}{8} - \cot\frac{\pi}{12}$

.69 حاصل افاده $\left(\sqrt{6}+\sqrt{6}\cos\sqrt{6}\right)\cos\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}\sin\sqrt{6}}{(1+\cos\sqrt{6})}$ مساوی است به:

1) $\frac{24}{\sin\sqrt{6}}$ 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\cos\sqrt{6}}$

3) $2\sqrt{6}\cos\sqrt{6}$ 4) $\sqrt{6}\csc\sqrt{6}$

.70 برای کدام قیمت α سیستم $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \sin x.\cos x=\alpha \end{cases}$ دارای حل میباشد:

1) $-\sqrt{3}\le 4\alpha\le 1$ 2) $0\le\alpha\le 1$

3) $-\sqrt{3}\le\alpha\le 1$ 4) $-3\le 4\alpha\le 1$

.71 برای کدام قیمت های ذیل a سیستم $\begin{cases} \sin x+\sin y=a \\ x+y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$ دارای حل میباشد:

1) $a<-\sqrt{2}$ 2) $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$

3) $-2\le a\le 2$ 4) $a>-\sqrt{2}$

.72 کدام یکی از سیستم های ذیل حل ندارد:

1) $\begin{cases} \sin x\sin y=3 \\ x+y=\pi \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\sin y=0 \\ x+y=\frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x\sin y=0 \\ x+y=\pi \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\sin y=1 \\ x+y=\pi \end{cases}$

.73 اگر $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ باشد آنگاه قیمت $\tan\frac{x}{2}$ عبارت از:

1) $\sqrt{3}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $2\sqrt{3}$

.74 اگر $\arccos(\sin x)=\sin a$ باشد آنگاه قیمت x از جنس a عبارت از:

1) $x=\frac{\pi}{2}+\cos a$ 2) $x=\frac{\pi}{2}-\sin a$
3) $x=\frac{\pi}{2}-\cos a$ 4) $x=\frac{\pi}{2}+\sin a$

75. حل معادله $1+\log\sin x-\log\cos x=0$ عبارت است از:

1) $x=\arctan\frac{1}{10}+k\pi$ 2) $x=\arctan\frac{1}{10}+2k\pi$
3) $x=\arctan 10+k\pi$ 4) $x=\arctan 10+2k\pi$

76. برای کدام قیمت های a معادله $\sin x\cos x\cos 2x=a$ دارای جواب است؟

1) $a<-\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{4}<a\le 1$
3) $-\frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{4}$ 4) $a>\frac{1}{4}$

77. حل عمومی معادله مثلثاتی $2\cos x-\sqrt{3}=0$ عبارت است از:

1) $\left\{x/x=k\pi\pm\frac{\pi}{4},x\in Z\right\}$ 2) $\left\{x/x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},x\in Z\right\}$
3) $\left\{x/x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},x\in Z\right\}$ 4) $\left\{x/x=(2k+1)\pi\pm\frac{\pi}{6},x\in Z\right\}$

78. برای کدام قیمت x معادله $4\sin x-2=0$ صدق میکند:

1) $x=\frac{\pi}{2}$ 2) $x=2\pi$ 3) $x=-\frac{\pi}{2}$ 4) $x=\frac{\pi}{6}$

79. کدام قیمت x در معادله $4\sin x=\frac{2}{\cos x}$ صدق میکند:

1) 45 2) 90 3) 60 4) 30

80. اگر $0<x<\pi$ و $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ باشد، پس $\tan x$ مساوی است به:

1) $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$ 2) $\frac{4-\sqrt{7}}{3}$ 3) $-\frac{(4+\sqrt{7})}{3}$ 4) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

.81 ست حل معادله $\cot x - 1 = 0$ عبارت از:

1) $(x = k\pi + \frac{\pi}{3}, x \in Z)$ 2) $(x = k\pi + \frac{\pi}{5}, x \in Z)$

3) $(x = k\pi + \frac{\pi}{4}, x \in Z)$ 4) $(x = 2k\pi + \frac{\pi}{5}, x \in Z)$

.82 قیمت x در معادله $\sqrt{8}sin^2 x - 2\sin x = 0$ مساوی است به:

1) 30 2) 45 3) 60 4) 90

.83 یک حل معادله $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$ عبارت است از:

1) $x = \frac{\pi}{4}$ 2) $x = -\frac{\pi}{4}$ 3) $x = \frac{\pi}{6}$ 4) $x = \frac{\pi}{3}$

.84 ست حل های مثلثاتی $(\sin x - \tan x)\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{4\pi}{3}$ عبارت است از:

1) $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 2) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 3) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ 4) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

.85
اگر C, B, A زوایای یک مثلث و c, b, a اضلاع مقابل این زوایا باشد، پس $\cos C$ مساوی است به:

1) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ 2) $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

3) $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab}$ 4) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}$

.86 در مثلث $A\dot{B}C$ $c = 6\sqrt{3}, b = 9, a = 3\sqrt{3},$ باشد، پس $\cos B$ مساوی است به:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

87. اگر C, B, A زوایای داخلی یک مثلث و c, b, a بالترتیب طول اضلاع مقابل آن باشد، پس $\frac{a+\sin A}{\sin A}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin B}{b-\sin B}$ 2) $\frac{b}{\sin B}$ 3) $\frac{b+\sin B}{\sin B}$ 4) $\frac{\sin B}{b+\sin B}$

88. در مثلث ABC ، $a = 50cm$ و $R = 25\sqrt{2}cm$ است، پس اندازه زاویه A مساوی است به:

1) $30°$ 2) $45°$ 3) $60°$ 4) $15°$

89. محیط یک مثلث متساوی الاضلاع 84 سانتی متر است، شعاع دایره محاطی آن عبارت است از:

1) $\frac{84}{18}\sqrt{3}cm$ 2) $\frac{28}{18}\sqrt{3}cm$

3) $\frac{84}{6}\sqrt{3}cm$ 4) $\frac{84}{3}\sqrt{3}cm$

90. $\frac{1}{\sec 22°\cdot\sin 31°\cdot\cos 53°}$ مساوی است به:

1) $\tan 22° + \cot 53°$ 2) $\tan 53° + \cot 31°$

3) $2\sec 22° \cdot \cos^2 53°$ 4) $\frac{1}{2}\sec 22° \cdot \sin 84°$

91. اگر $A + B = \frac{\pi}{4}$ باشد پس $(1 + \tan A)(1 + \tan B)$ مساوی است به:

1) 1 2) $\sqrt{3}$ 3) -1 4) 2

92. $\cos^2\sqrt{3} + \frac{\tan^2\sqrt{3}}{\sec^2\sqrt{3}}$ مساوی است به:

1) $\tan^2\sqrt{3}$ 2) 1 3) $\tan^2\sqrt{3} - 1$ 4) 2

فصل هشتم

هندسه

هندسه مسطحه

مفاهیم اساسی هندسه: اساس گذار این هندسه اقلیدس بوده که می توان این هندسه را دو بعدی تعریف نموده که دارای مفاهیم اساسی ذیل می باشد.

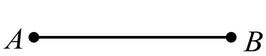
نقطه: کوچک ترین اثر روی یک سطح یا شکل که از ابعاد آن صرف نظر گردیده باشد، نقطه نامیده می شود.

خط: اتصال نقاط روی یک سطح یا شکل هندسی که فقط طول آن مورد توجه باشد، خط نامیده می شود.

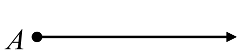
اقسام خط: بطور عموم خط به سه نوع می باشد.

1. **خط مستقیم:** کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه را خط مستقیم می نامند، که به سه شکل ملاحظه می گرد.

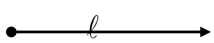
- **قطعه خط (خط محدود):** خط مستقیم که مبدأ و انجام آن معلوم باشد.



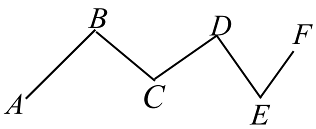
- **نیم خط (خط نیمه محدود):** خط مستقیم که دارای مبدأ و فاقد انجام باشد.



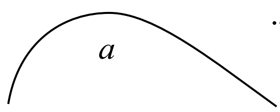
- **خط نامحدود:** خط مستقیم که مبدأ و انجام آن محدود نگردیده.



2. **خط منکسر:** چندین قطعه خط مستقیم که در امتداد همدیگر قرار نداشته باشند خط منکسر نامیده می شود.

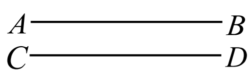


3. **خط منحنی:** خط که در هر حالت با خط مستقیم فقط یک نقطه مشترک داشته باشد و یا به عباره دیگر خط که نه در شکل مستقیم و نه در شکل منکسر باشد خط منحنی نامیده می شود.

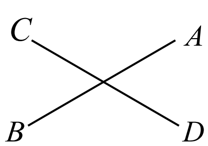


حالات خطوط نظر به همدیگر

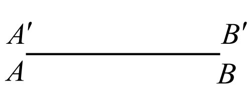
1) **خطوط موازی:** خطوط مستقیم که در یک سطح قرار داشته و هیچ نقطه مشترک نداشته باشند خطوط موازی نامیده می شوند.



2) **خطوط متقاطع:** به خطوط گفته می شوند که یکدیگر را در یک نقطه قطع نمایند.

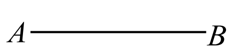


3) **خطوط منطبق:** خطوط که تمام آنها با همدیگر مشترک باشند، خطوط منطبق می گویند.

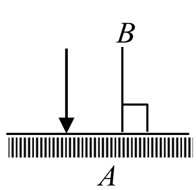


وضعیت خط مستقیم:

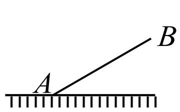
1) **خط افقی:** به خط مستقیمی گفته می شود، که موازی با سطح زمین باشد.



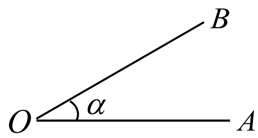
2) **خط عمودی:** به خط مستقیمی گفته می شود که در امتداد شاقول باشد.



3) **خط مایل:** خط مستقیمی که بالای یک سطح نه موازی و نه عمود باشد.



زاویه: شکلی را که دو خط مستقیم متقاطع در نزدیکی نقطه تقاطع خود تشکیل می دهند، که دارای مبدأ مشترک باشند و زاویه نامیده می شود.



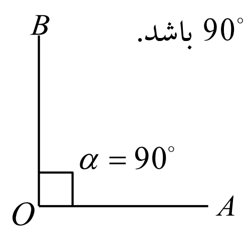
$\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ اضلاع زاویه و O رأس زاویه و α وسعت زاویه گفته می شود.

اندازه گیری زاویه: واحدات اندازه گیری زاویه درجه، گراد و رادیان می باشد طوریکه یک دایره به 360 حصه مساوی تقسیم گردیده هر حصه آن یک درجه نامیده می شود.

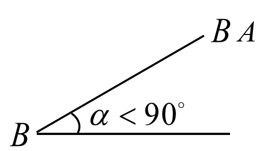
آله اندازه گیری زاویه: نقاله می باشد که از یک نیم دایره تشکیل گردیده که از چپ به راست و راست به چپ به 180 حصه مساوی تقسیم گردیده است.

انواع زاویه:

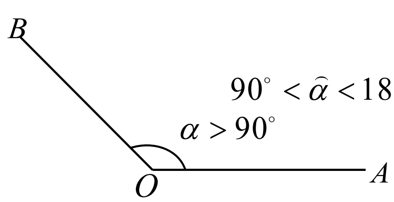
زاویه قایمه: زاویه است که اضلاع آن با همدیگر عمود باشند، یا وسعت آن 90° باشد.



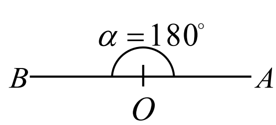
زاویه حاده: زاویه است که وسعت آن کمتر از 90° باشد. $0^\circ < \widehat{\alpha} < 90^\circ$



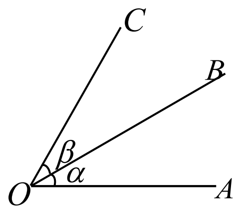
زاویه منفرجه: زاویه است که وسعت آن بیشتر از 90° باشد. $90^\circ < \widehat{\alpha} < 180^\circ$



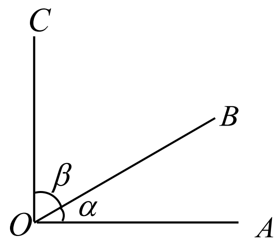
زاویه مستقیمه: زاویه است که وسعت آن دو قایمه (مساوی به 180°) باشد $\alpha = 180^\circ$



زوایای مجاوره: دو زاویه که رأس مشترک، ضلع مشترک داشته باشند، زوایای مجاوره نامیده میشود.

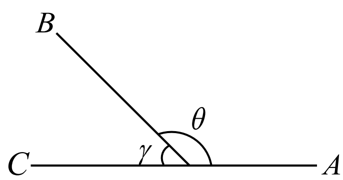


زوایای مکمله: دو زاویه که مجموعه آنها یک قایمه (90°) باشند مکلمه یکدیگر نامیده می شوند.



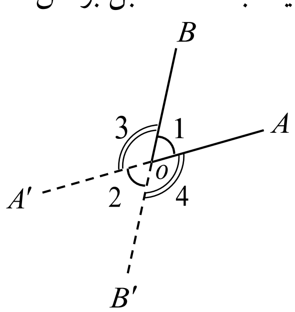
$$\hat{\theta}+\hat{\beta}=90^\circ$$

زوایای متممه: دو زاویه که مجموعه آنها دو قایمه 180° باشند متمم یکدیگر نامیده میشوند.



$$\hat{\theta}+\gamma=180^\circ$$

زوایای متقابل براس: زوایای که از امتداد اضلاع یکدیگر تشکیل گردیده باشند، متقابل بردس نامیده می شوند، زوایای متقابل براس بدو با همدیگر مساوی اند.



زوایای متبادله و متوافقه: هرگاه دو خط موازی توسط یک خط مستقیم قطع گردد،هشت زاویه را تشکیل میدهد. مانند شکل ذیل.

طوریکه: زاویای $\hat{8},\hat{7},\hat{2},\hat{1}$ زاوایا خارجی

زاویای $\hat{6},\hat{5},\hat{4},\hat{3}$ زوایای داخلی گفته می شوند.

زوایای متبادله: دو زاویه که هر دو آن داخلی و یا هر دو آن خارجی بود بدو طرف خط قاطع قرار داشته و رأس مشترک نداشته باشند متبادله نامیده می شوند که با هم مساوی نیز می باشند.

زوایای $(\hat{3},\hat{5})$ و $(\hat{4},\hat{6})$ متبادله داخلی بوده که $\hat{5}=\hat{3}$ و $\hat{4},\hat{6}$ می باشد.

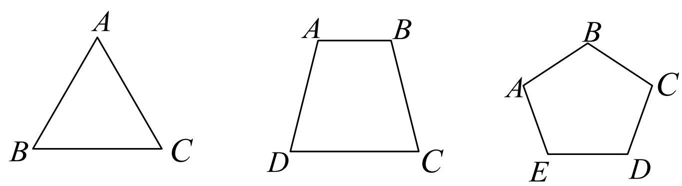
زوای $(\hat{1},\hat{7})$ و $(\hat{2},\hat{8})$ متبادله خارجی بوده که $\hat{7}=\hat{1}$ و $\hat{2},\hat{8}$ است.

زوایای متوافقه: دو زاویه که یکی آن داخلی و یکی آن خارجی بوده به یک طرف خط قاطع قرار داشته و رأس مشترک نداشته باشند، متوافقه نامیده می شوند که با هم مساوی نیز می باشند. یعنی:

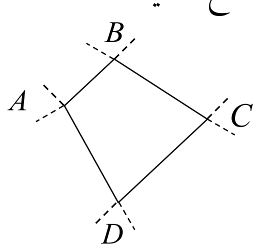
$(\hat{1},\hat{5})\Rightarrow \hat{1}=\hat{5}$، $(\hat{2},\hat{6})\Rightarrow \hat{2}=\hat{6}$، $(\hat{3},\hat{7})\Rightarrow \hat{3}=\hat{7}$ و $(\hat{4},\hat{8})\Rightarrow \hat{4}=\hat{8}$ می باشند.

مضلعات (چند ضلعی ها)

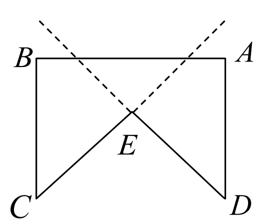
مضلع عبارت از خط منکسر بسته یی است که فقط یک ناحیه بسته را تشکیل می دهد که هیچ دو خط آن به امتداد یک خط مستقیم قرار نداشته و هر رأس آن نقطه تقاطع دو قطعه خط باشد، مانن: سه ضلعی (مثلث)، چهار ضلعی (مربع، مستطیل، ذوذنقه،...) پنج ضلعی، شش ضلعی و غیره.



مضلع محدب: مضلعی است که امتداد اضلاع آن هیچ ضلع از مضلع را قطع ننماید:



مضلع مقعر: عبارت از مضلعی است که حداقل امتداد یکی از اضلاع آن مضلع مذکور را قطع نماید.



مضلع منظم: به مضلعی گفته می شود که طول تمام اضلاع آن با هم مساوی و وسعت تمام زوایای آن با هم یکسان باشند.

مضلع غیر منظم: مضلعی را می گویند که طول اضلاع با هم مساوی نبوده و همچنان وسعت زوایا نیز با هم مساوی نباشند.

قطر مضلع: عبارت از خطی مستقیمی است که دو رأس غیر مجاور مضلع را با هم وصل می نماید.

یادداشت: برای یک مضلع n ضلعی روابط ذیل را بخاطر داشته باشید:

1) مجموعه تمام اقطار یک مضلع n ضلعی عبارت از:

$$D=\frac{n(n-3)}{2}$$

2) تعداد قطرهای که از یک رأس ضلع n ضلعی می گذرد، عبارت از:

$$N=n-3$$

3) تعداد مثلث های که از اثر ترسیم یک مضلع n ضلعی به دست می آید، عبارت از:

$$\Delta=n-2$$

4) مجموعه زوایای داخلی یک مضلع n ضلعی عبارت از:

$$S=(n-2)\cdot 180^\circ$$

5) وسعت یک زاویه داخلی مضلع منظم n ضلعی عبارت از:

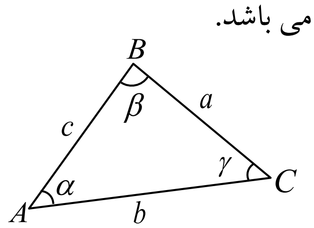
$$n=\frac{360}{180-\alpha} \quad \hat{\alpha}=\frac{(n-2)\cdot 180}{n}$$ و یا

6) وسعت یک زاویه خارجی مضلع منظم n ضلعی عبارت از:

$$\hat{\beta}=\frac{360}{n}$$

مثلث

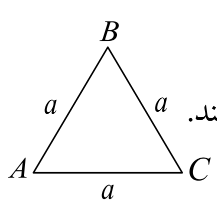
مضلع که تنها دارای سه ضلع باشد یا سطح که توسط سه قطعه خط محدود شده باشد مثلث نامیده می شود، هر مثلث دارای سه ضلع (b,a و c) سه رأس (C,B,A) و سه زاویه (θ,β,α) می باشد.



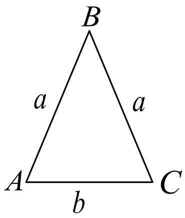
انواع مثلث:

الف: مثلث ها از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم گردیده است.

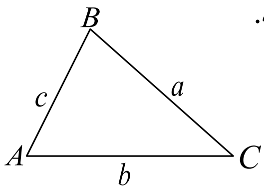
1) **مثلث متساوی الاضلاع:** مثلث که طول تمام اضلاع آن با هم مساوی باشند.



2) **مثلث متساوی الساقین:** مثلث که دو ضلع آن با هم مساوی باشند.

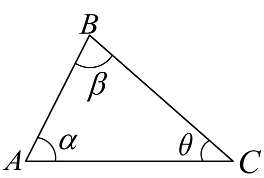


3) **مثلث مختلف الاضلاع:** مثلث که طول تمام اضلاع آن مختلف باشند.

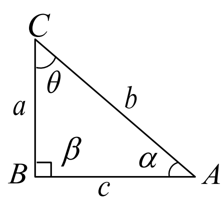


ب: مثلث ها از نظر زاویه به سه دسته تقسیم گردیده است.

1) **مثلث حاده الزاویه:** مثلث که تمام زوایای داخلی آن حاده باشد $\hat{\theta}<90^\circ$ ، $\hat{\beta}<90^\circ$، $\hat{\alpha}<90^\circ$

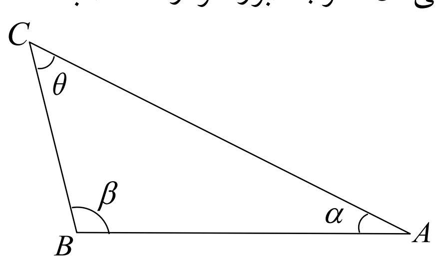


2) **مثلث قایم الزاویه:** مثلث که اندازه یک زاویه داخلی آن (90°) باشد. $\hat{\theta}<90^\circ$ ، $\hat{\beta}<90^\circ$، $\hat{\alpha}<90^\circ$



همچنان ضلع مقابل زاویه 90° را وتر مثلث نیز می نامند.

3) **مثلث منفرجه الزاویه:** مثلث که اندازه یک زاویه داخلی آن منفرجه (بزرگتر از 90°) باشد.

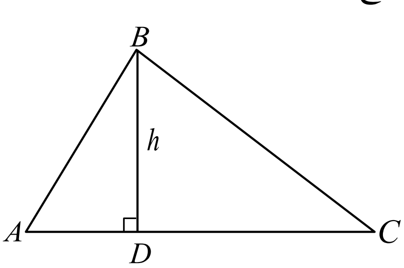


$\hat{\alpha}<90^\circ$

$\hat{\beta}<90^\circ$

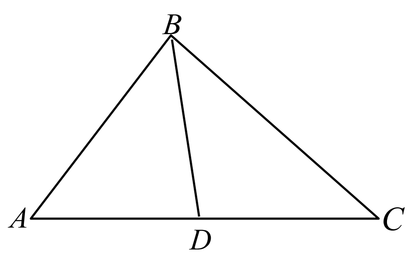
$\hat{\theta}<90^\circ$

ارتفاع مثلث: عبارت از خط مستقمی است که رأس مثلث بالای ضلع مقابل آن عمود باشد. مانند خط $\overline{BH}$

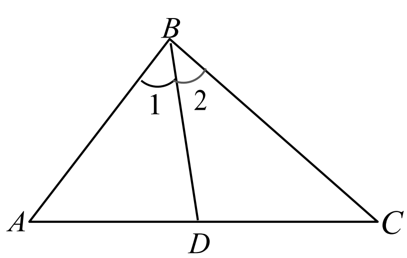


بخاطر داشته باشید که:

1. ارتفاعات مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کند.
2. ارتفاعات مثلث حاده الزاویه یکدیگر را در داخل مثلث قطع می کنند.
3. ارتفاعات مثلث قایم الزاویه یکدیگر را در روی رأس قایم قطع می کنند.
4. ارتفاعات مثلث منفرجه یکدیگر را در خارج مثلث قطع می کنند.
5. در هر مثلث قایم الزاویه ارتفاع که از رأس قایم بالای وتر آن رسم شود مساوی به نصف طول وتر است.



میانه مثلث: عبارت از خط مستقیمی است که رأس مثلث ضلع مقابل آنرا تنصیف نماید. مانند $\overline{BD}$ بخاطر داشته باشید که در تمام انواع مثلث ها میانه ها یکدیگر را در یک نقطه در داخل مثلث قطع میکنند. (نقطه تقاطع مرکز ثقل مثلث می باشد) و نقطه تقاطع میانه ها، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کند.

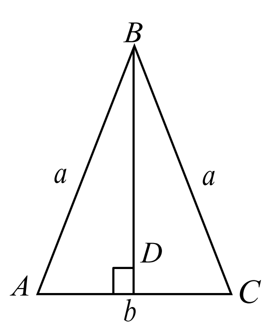


ناصف زاویه مثلث: عبارت از خط مستقیمی است که زوایای مثلث را به دو حصه مساوی تقسیم می نماید، مانند $\overline{BM}$، طوریکه $\hat{1} = \hat{2}$ است. ناصف زوایای داخلی هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه در داخل مثلث قطع می نماید.

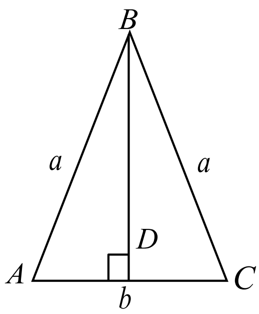
ناصف عمودی: هرگاه در یک مثلث ارتفاع و میانه با هم منطبق باشند ناصف عمودی نامیده می شود.

بخاطر داشته باشید که:

1- در مثلث متساوی الاضلاع میانه ها، ارتفاعات و ناصف الزاویا با هم منطبق اند. خط $\overline{BD}$ ارتفاعف میانه و ناصف الزاویه می باشد.



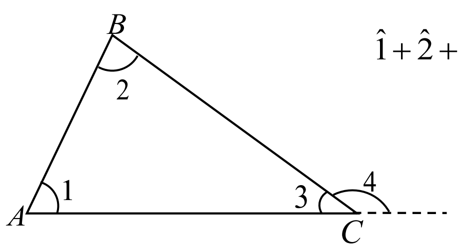
2- در مثلث متساوی الساقین رأس که از ارتفاع و میانه از این رأس با هم منطبق اند، یعنی ناصف عمودی می باشد.



خواص زاویا و اضلاع یک مثلث:

1) مجموع زوایای داخلی هر مثلث مساوی به دو قایمه (180°) می باشد.

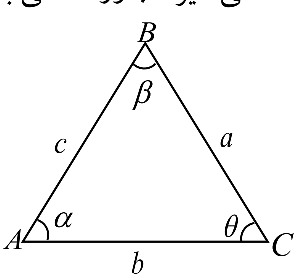
2) اگر اضلاع یک مثلث را به ترتیب امتداد بدهیم مجموعه زوایای خارجی آن 360° می باشد.



$$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=360^\circ$$

3) مجموعه تمام زوایای خارجی هر مثلث 900° می باشد.

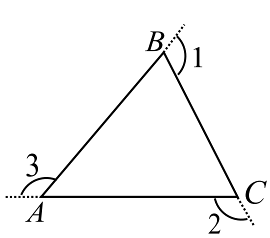
4) مجموعه تمام زوایای خارجی در هر مثلث مساوی به مجموعه دو زاویه داخلی غیر مجاور آن می باشد.



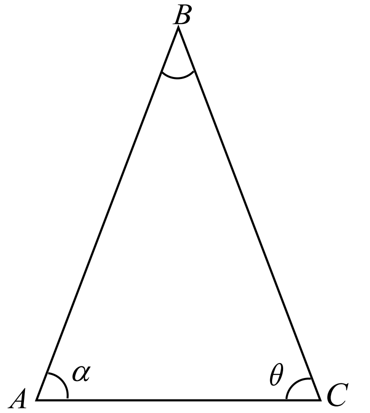
$$\hat{4}=\hat{1}+\hat{2}$$

5) مثلث متساوی الاضلاع عبارت از یک مضلع منظم بوده که طول اضلاع و همچنان اندازه زوایای داخلی آن با هم مساوی اند.

$$a=b=c \text{،} \hat{\alpha}=\hat{\beta}=\hat{\theta}$$



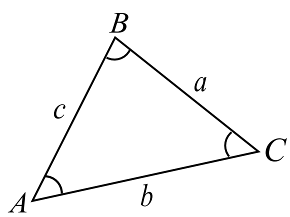
6) در مثلث متساوی الساقین اندازه دو زاویه داخلی مقابل اضلاع مساوی مثلث با هم مساوی اند.



$$\hat{\alpha} = \hat{\theta}$$
$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

7) ناصف الزاویای داخلی و خارجی مثلث در یک رأس بالای همدیگر عمود اند.

8) در هر مثلث مجموعه دو ضلع همیشه بزرگ تر از ضلع سوم می باشد. یعنی:



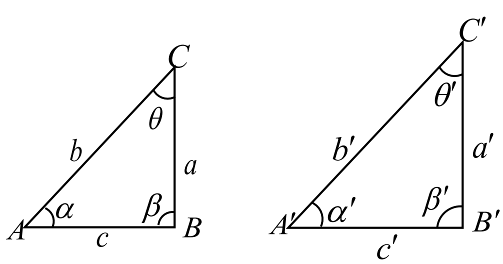
$b+c>a$ ، $a+c>b$ ، $a+b>c$

تشابه دو مثلث:

دو مثلث زمانی با هم متشابه گفته می شوند که:

1) تمام زوایای آنها دو به دو با هم مساوی باشند.

2) تمام اضلاع آن دو به دو با هم متناسب باشند.



$$\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \quad \text{و} \quad \begin{matrix} \alpha = \alpha' \\ \beta = \beta' \\ \theta = \theta' \end{matrix}$$

انطباق پذیری دو مثلث: دو مثلث در سه حالت ذیل انطباق پذیر گفته می شوند.

1) طول هر سه ضلع دو مثلث دوبدو با هم مساوی باشند.

2) طول دو ضلع و یک زاویه داخلی بین این دو ضلع در هر دو مثلث دوبدو با هم مساوی باشند.

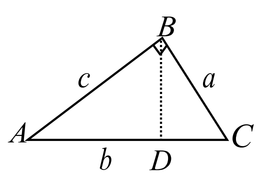
3) طول یک ضلع اندازه دو زاویه داخلی در هر دو مثلث دوبدو با هم مساوی باشند.

بخاطر داشته باشید که دو مثلث انطباق پذیر با هم متشابه اندف زیرا در مقابل اضلاع مساوی زوایای مساوی قرار دارد. اما دو مثلث متشابه همیشه با هم انطابق نیست، زیرا امکان دارد در مقابل زوایای مساوی اضلاع مساوی قرار نداشته باشند.

قضایا:

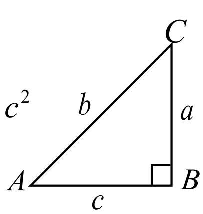
1) در هر مثلث قایم الزاویه مربع هر یک از اضلاع قایم مساوی به حاصل ضرب وتر در مرتسم همان ضلع قایم بالای وتر می باشد. یعنی:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{AD} \Rightarrow c^2 = b\cdot\overline{AD}$$
$$\overline{BC} = \overline{AC}\cdot\overline{CD} \Rightarrow a^2 = b\cdot\overline{DC}$$



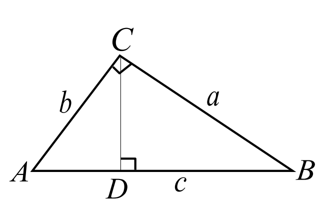
2) در هر مثلث قایم الزاویه مجموعه مربعات دو ضلع قایم مساوی به مربع وتر می باشد(قضیه فیثاغورث) یا (پیتاگور)

$b^2 = a^2 + c^2$

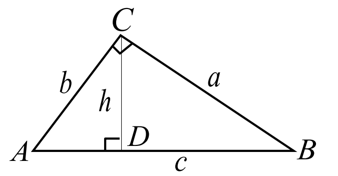


3) در هر مثلث قایم الزاویه ارتفاع مربوط رأس قایم عبارت از وسط هندسی مرتسمات دو ضلع قایم بالای وتر همان مثلث می باشد.

یعنی $\overline{CD}^2 = \overline{AD}\cdot\overline{BD}$ و یا $\overline{CD} = \sqrt{\overline{AD}\cdot\overline{BD}}$



4) در هر مثلث قایم الزاویه حاصل ضرب اضلاع قایم مساوی به حاصل ضرب وتر و ارتفاع رأس قایم آن مثلث می باشد، یعنی $a\cdot b=h\cdot c$

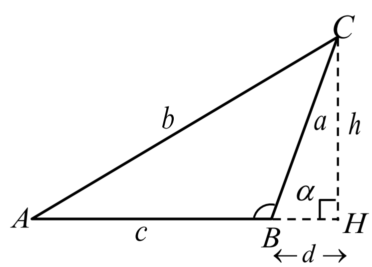


همچنان با در نظر قضیه فیساغورث و رابطه فوق می توان نوشت:

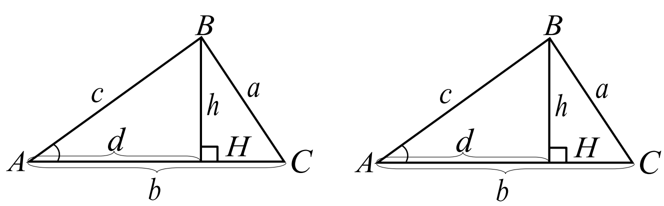
$$\left.\begin{array}{l} c^2=a^2+b^2...(1) \\ h^2c^2=a^2\cdot b^2...(2) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{c^2}{h^2\cdot c^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\Rightarrow \frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

5) در هر مثلث منفرج الزاویه مربع ضلع مقابل زاویه منفرجه مساویست به:

$\hat{\alpha}>90^\circ$

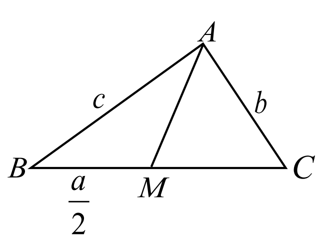


6) در هر مثلث مربع ضلع مقابل زاویه حاده مساویست به:



7) در هر مثلث مجموع مربعات هر دو مضلع آن مثلث مساوی به دو چند مجموع مربعات نصف ضلع سوم و میانه ضلع سوم می باشد.

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2\left(B\overline{M}^2+A\overline{M}^2\right)$$



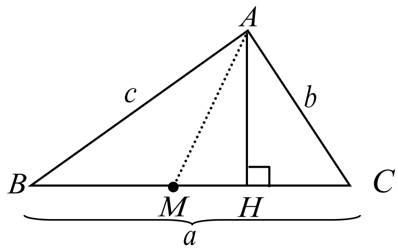
یعنی مربع میانه مساوی است به:

$$\overline{AM}^2=\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}$$

8) تفاضل مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به دو چند حاصل ضرب ضلع سوم و مرتسم میانه ضلع سوم است.

$$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=2\overline{BC}\cdot\overline{MH}$$

$$\Rightarrow c^2-b^2=2a\cdot\overline{MH}$$

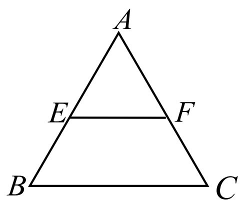


دعوی تالس

اگر یک خط موازی به یک ضلع مثلث ABC رسم گردد اضلاع مقابل را متناسباً تقسیم می نماید:

یعنی: $\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{EB}$

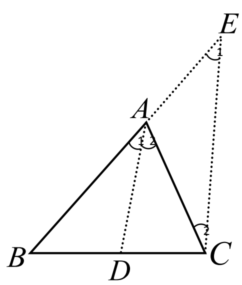
همچنان $\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{AF}=\frac{EF}{BC}$



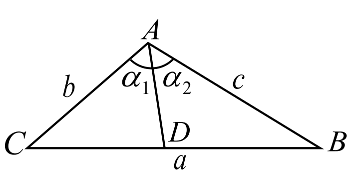
خواص ناصف زوایای یک مثلث

1 . ناصف الزوایای داخلی یک مثلث ضلع مقابل را داخلاً متناسب به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می نماید، در حالیکه خط $\overline{AD}$ ناصف زاویه داخلی زاویه $\hat{A}$ مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ می باشد.

پس $\frac{BA}{AE}=\frac{BD}{DC}$



2 . طول ناصف الزاویه داخلی یک مثلث در حالیکه $\overline{AD}$ ناصف الزاویه $\hat{A}$ باشد، از رابطهٔ ذیل به دست می آید:

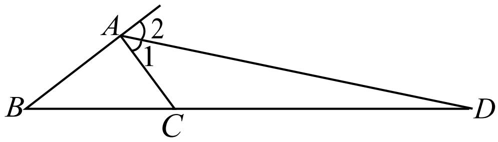


$$\alpha_1=\alpha_2$$

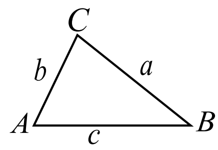
$$P=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\overline{AD}=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$$

3 . ناصف الزاوایای خارجی یک مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ اضلاع مقابل را خارجاً به نسبت اضلاع مجاور تقسیم می کند، در حالیکه خط $\overline{AD}$ ناصف زاویه خارجی زاویه $\hat{A}$ مثلث $A\overset{\Delta}{B}C$ می باشد. پس $\frac{DC}{BD}=\frac{AC}{AB}$



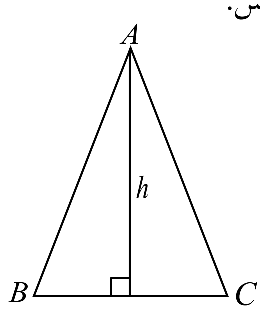
محیط مثلث: عبارت از مجموع طول اضلاع مثلث است، یعنی:



$$P = a + b + c$$

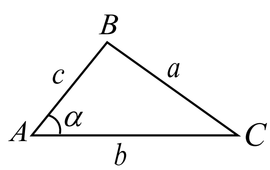
مساحت مثلث: عبارت از سطح است که توسط اضلاع مثلث محاط شده باشد، که در چهار حالت میتوان مساحت مثلث را دریافت نمود.

حالت اول: در صورتیکه طول قاعده و ارتفاع مثلث معلوم باشد، پس:



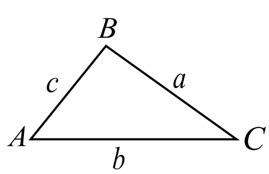
$$A = \frac{1}{2} a \cdot h$$

حالت دوم: در صورتیکه دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع معلوم باشد، پس:



$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

حالت سوم:در صورتیکه طول سه ضلع مثلث معلوم باشد، در حالیکه $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ است، پس:



$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

با در نظر داشت حالت سوم مساحت مثلث متساوی الاضلاع $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$ و طول ارتفاع آن $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2} a$ می باشد.

حالت چهارم: در صورتیکه مختصات رأس های یک مثلث $A(x_1.y_1)$، $B(x_2.y_2)$ و $C(x_3.y_3)$ داده شده باشد، مساحت مثلث مذکور از رابطه ذیل حاصل می گردد:

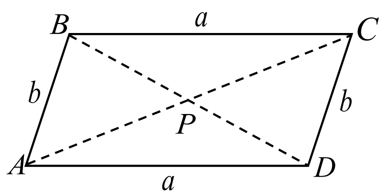
$$A = \frac{1}{2}\{(x_1y_3 - x_3y_1) + (x_2y_1 - x_1y_2) + (x_3y_2 - x_2y_3)\}$$

و یا با استفاده از دیترمینانت ذیل می توان چنین نوشت:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\left(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1\right)-\left(y_1x_2+y_2x_3+y_3x_1\right)\right]$$

چهار ضلعی ها

مضلع که توسط چهار قطعه خط محدود شده باشد چهار ضلعی گفته می شود، هر چهار ضلعی دارای چهار ضلع، چهار رأس، چهار زاویه و دو قطر می باشد.



انواع چهار ضلعی ها:

I. **متوازی الاضلاع :** چهار ضلع است که اضلاع مقابل آن دو به دو با هم موازی باشند.

خواص متوازی الاضلاع:

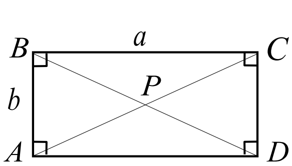
- اضلاع مقابل آن با هم مساوی اند. $\overline{AB}=\overline{CD}$ و $\overline{AD}=\overline{BC}$
- وسعت زوایای مقابل آن با هم مساوی اند. $\hat{B}=\hat{D}$ و $\hat{A}=\hat{C}$
- مجموعه زوایای داخلی آن مساوی به 360° می باشد. $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$
- مجموعه زوایای مجاور آن مساوی به $\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$, $\hat{C}+\hat{D}=180^\circ$, $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$
- قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را تنصیف می نمایند. یعنی:

$\overline{AP}=\overline{PC}$, $\overline{BP}=\overline{PD}$

- محیط متوازی الاضلاع عبارت از:

$P=2(a+b)$

II. **مستطیل:** عبارت از متوازی الاضلاع است که زوایای داخلی آن قایمه باشد.



خواص مستطیل:

1. طول اضلاع دو به دو با هم مساوی اند. یعنی

$\overline{AB}=\overline{CD}\quad,\quad\overline{AD}=\overline{BC}$

2. قطرهای مستطیل همدیگر را تنصیف می نماید. یعنی:

$\overline{AP}=\overline{PC}\quad,\quad\overline{BP}=\overline{PD}$

3. طول قطرهای مستطیل با همدیگر مساوی اند. یعنی:

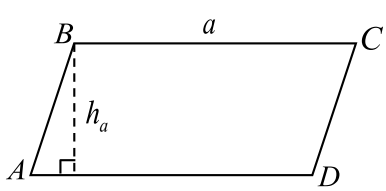
$\overline{AP}=\overline{BD}$

4. محیط مستطیل عبارت از: $P=2(a+b)$

5. مساحت مستطیل عبارت از: $A=a\cdot b$

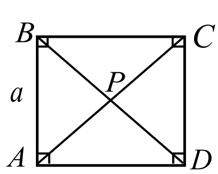
6. طول قطر مستطیل عبارت از: $d=\sqrt{a^2+b^2}$

7. مساحت مستطیل عبارت از:



$A=b\cdot h_b$

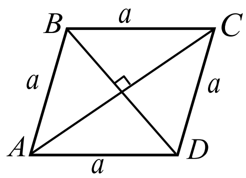
III. **مربع:** متوازی الاضلاع که طول آن با هم مساوی و زوایای داخلی آن قایمه باشد، مربع نامیده می شود.



خواص مربع:

- طول قطر های آن با هم مساوی اند. یعنی: $\overline{AC}=\overline{BD}$
- قطر ها بالای همدیگر عمود اند. یعنی: $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
- قطرها یکدیگر را تنصیف می نماید. یعنی: $\overline{AP}=\overline{PC},\overline{BP}=\overline{PD}$
- محیط مربع عبارت از: $P=4a$
- مساحت مربع عبارت از: $A=a^2$
- طول قطر مربع عبارت از: $d=\sqrt{2}a$

IV. **معین (لوزی):** متوازی الاضلاع که طول تمام اضلاع آن با هم مساوی باشد، معین (لوزی) گفته می شود.

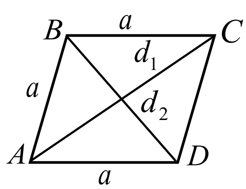


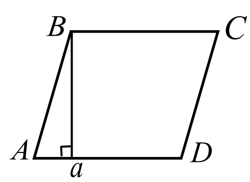
خواص معین:

- اندازه زوایای مقابل آن با هم مساوی اند یعنی: $\hat{B}=\hat{D}$ و $\hat{A}=\hat{C}$
- مجموعه زوایای مجاور آن مساوی به 180° می گردد،یعنی:

$$\hat{A}=\hat{B}=180^\circ\ ,\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\ ,\hat{C}+\hat{D}\ ,\hat{A}+\hat{D}=180^\circ$$

- قطر های همدیگر را تنصیف می نماید، یعنی: $\overline{BP}=\overline{PD}$ و $\overline{AP}=\overline{PC}$
- قطرهای بالای همدیگر عمود اند، یعنی: $\overline{AC}\perp\overline{BD}$
- محیط معین عبارت از: $P=4a$
- مساحت معین:



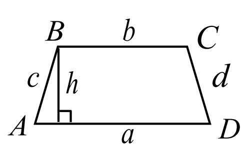


$A=\frac{1}{2}d_1\cdot d_2$

$A=a\cdot h$

V. **ذوذنقه (منحرف):** عبارت از چهار ضلعی است که دو ضلع آن موازی و دو ضلع آن غیر موازی باشد.

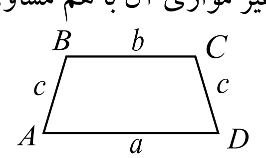
(بخاطر داشته باشید که اضلاع موازی را قاعدتین ذوذنقه هم می نامند)



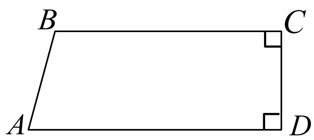
انواع ذوذنقه:

1. **ذوذنقه متساوی الساقین:** به ذوذنقه گفته می شود که طول دو ضلع غیر موازی آن با هم مساوی باشد.

مانند: $\overline{AB}=\overline{CD}$



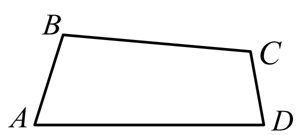
2. **ذوذنقه قایم:** ذوذنقه را گویند که دو زاویه داخلی آن قایمه باشد.



محیط ذوذنقه: در صورتیکه a,b,c و d طول اضلاع آن باشد، پس محیط آن $P=a+b+c+d$

مساحت ذوذنقه: در صورتیکه a,b قاعدتین ذوذنقه و h ارتفاع آن باشد، مساحت $A=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

VI. **شبه منحرف:** عبارت از چهار ضلعی است که اضلاع آن با هم موازی نباشند.

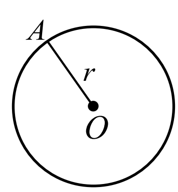


دایره

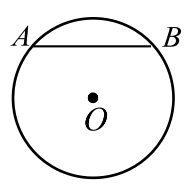
عبارت از خط منحنی بسته است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت (مستقر) دارای فاصله مساوی باشد، نقطه ثابت (O) را مرکز دایره و فاصله ثابت (r) را شعاع می نامند.

شعاع دایره: فاصله بین مرکز الی محیط دایره شعاع دایره نامیده میشود.

$$r=\overline{OA}$$

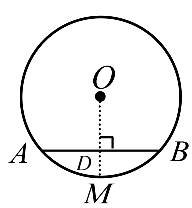


وتر دایره: خط مستقیمی که دو نقطه محیط دایره را با هم وصل نماید وتر دایره نامیده می شود.



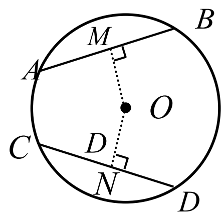
بخاطر داشته باشید که:

1. خط مستقیمی که از مرکز دایره بالای وتر عمود باشد، وتر و قوس آنرا بدو حصه مساوی تقسیم می نماید.

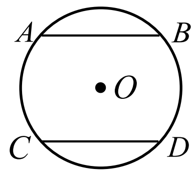


$\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{MB}$ و $\overline{AD}=\overline{DB}$

2. وتر های مساوی، از مرکز دایره دارای فاصله عمودی مساوی می باشند. اگر $\overline{AB} = \overline{CD}$ باشد، پس $\overline{OM} = \overline{ON}$ می باشد.

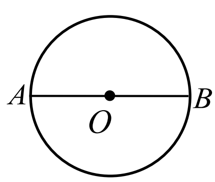


3. قوس های بین دو وتر موازی با همدیگر مساوی می باشند. اگر $\overline{AB} // \overline{CD}$ پس $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$ است.



قطر دایره: خط مستقیم که دایره را تنصیف نماید قطر دایره نامید می شود و یا وتری که از مرکز دایره عبور نماید (

بزرگترین وتر) قطر دایره نامیده می شود، طوریکه قطر دایره دو چند شعاع دایره می باشد.

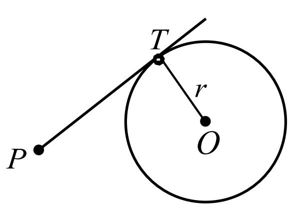


$\overline{AB} = d$

$d = 2r$

$r = \dfrac{d}{2}$

مماس دایره: قطعه خط مستقیم که با دایره در یک نقطه تماس داشته باشد بنام مماس دایره یاد می گردد.



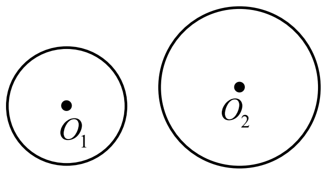
قابل یادآوری است اینکه:

1. شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس عمود می باشد.
2. هرگاه نقطه P خارج دایره قرار داشته باشد بر دایره مذکور دو مماس رسم می گردد (که طول مماس ها با هم مساوی اند)
3. هرگاه نقطه P روی محیط دایره قرار داشته باشد بر دایره مذکور یک مماس رسم می گردد.

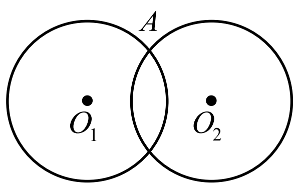
4. هرگاه نقطه P داخل دایره قرار داشته باشد بر دایره مذکور هیچ مماس رسم نمی گردد (خط مذکور دایره را در دو نقطه قطع می کند)

وضعیت دو دایره با همدیگر

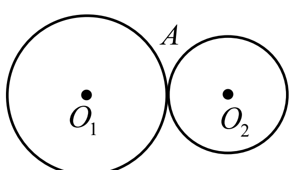
- **دو دایره غیر متقاطع:** به دوایر گفته می شود که هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



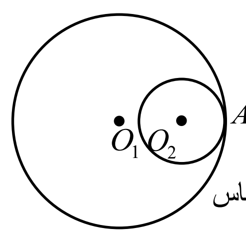
- **دوایر متقاطع:** به دایره های گفته می شود که دارای دو نقطه مشترک باشند.



- **دوایر با هم مماس:** به دوایر گفته می شود که تنها یک نقطه مشترک داشته باشند.

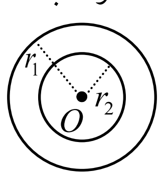


خارجاً مماس



داخلاً مماس

- **دوایر متحد المرکز:** به دوایر گفته می شود که مراکز آنها منطبق و طول شعاعات آنها متفاوت باشد.



یاداشت:

در صورتیکه: $C(O,R)$ و $C'(O',R')$

دو دوایر را ارائه نمایید، طوریکه: $R > R'$ و $d = OO'$

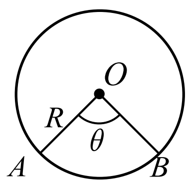
فاصلهٔ خط واصل مراکز دوایر را نشان می دهد، در اینصورت داریم که:

- دوایر غیر متقاطع اند اگر: $d > R + R'$
- دوایر متقاطع اند اگر: $\begin{cases} d < R + R' \\ d > R - R' \end{cases}$
- دوایر مماس خارجی اند اگر: $d = R + R'$

- دوایر مماس اند اگر: $d=R-R'$
- دوایر تداخل اند اگر: $d<R-R'$

زوایای مربوط به دایره

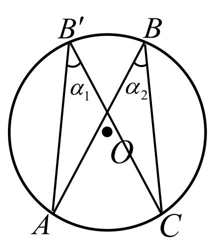
1) **زاویه مرکزی:** زاویه را گویند که رأس آن در مرکز دایره و دو ضلع آن در امتداد شعاع دایره باشد.



الف- اندازه وسعت هر زاویه مرکزی مساوی به قوس مقابل آن است.

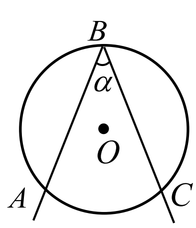
ب- طول قوس زاویه مرکزی از رابطه $\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{P}=\dfrac{\hat{\theta}}{360^\circ}$ بدست می آید. (طوریکه P محیط دایره را نشان می دهد.)

2) **زاویه محیطی:** به زاویه گفته می شود که رأس آن در محیط دایره قرار داشته و اضلاع آن در امتداد وترهای دایره باشد.



بخاطر داشته باشید که:

الف- وسعت هر زاویه محیطی مساوی به نصف قوس مقابل که توسط آن قطع شده می باشد.

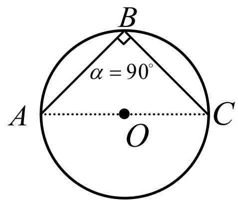


$$\hat{\alpha}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

ب- زوایای محیطی که در مقابل عین قوس دایره قرار داشته باشند. با هم مساوی اند.

$\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_2$

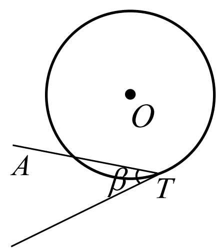
ج – زاویه محیطی که اضلاع آن از انجام های قطر دایره عبور نماید، یا به عباره دیگر در مقابل نصف محیط دایره قرار داشته باشد، مساوی به یک قایمه (90°) است.



3) **زاویه مماسی:** زاویه که یک ضلع آن مماس دایره و ضلع دیگر آن وتر دایره بوده و رأس آن در نقطه تماس قرار داشته باشد، زاویه مماسی گفته می شود.

بخاطر داشته باشید که:

وسعت هر زاویه مماسی نصف قوس مقابل آن است. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BT}$



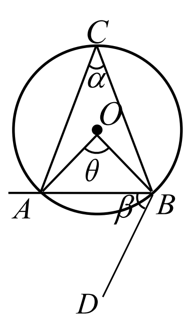
رابطه بین زوایای محیطی، مرکزی و مماسی:

هرگاه زوایای محیطی، مرکزی و مماسی که در مقابل عین قوس دایره قرار داشته باشند بین آنها روابط ذیل وجود دار: طوریکه $\hat{\theta}$ زاویه مرکزی، $\hat{\alpha}$ زاویه محیطی و $\hat{\beta}$زاویه محیطی و $\hat{\beta}$ زاویه مماسی می باشد.

$$\theta = 2\alpha \Rightarrow \hat{\alpha} = \frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

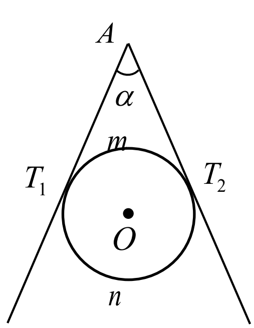
$$\theta = 2\beta \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\theta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

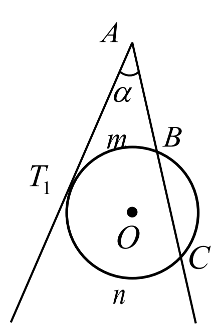
$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

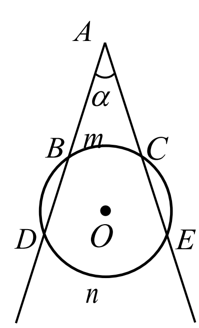


زاویه خارجی یک دایره

زاویه که از تقاطع دو مماس، با یک مماس و یک قاطع و یا دو قاطع بر دایره تشکیل می شود زاویه خارجی نامیده می شود:



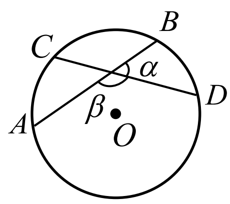




به خاطر داشته باشید که در هر یک از حالت فوق اندازه زاویه خارجی مساوی است به نصف تفاضل قوس های که در مقابل آن زوایا قرار دارند. یعنی: $\hat{\alpha}=\frac{1}{2}(n-m)$

زاویه داخلی دایره

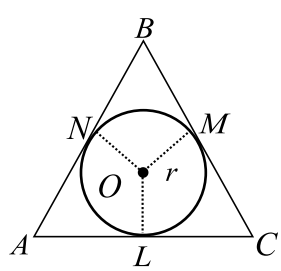
زاویه که از تقاطع دو تر در داخل یک دایره تشکیل می شوند زاویه داخلی آن دایره یاد می شوند. $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ زوایای داخلی دایره نامیده می شوند.



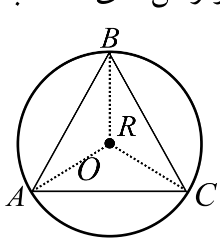
وسعت یک زاویه داخلی مساوی به نصف مجموع قوس های قطع شده توسط اضلاع و امتداد اضلاع همان زاویه است. یعنی:

$$\hat{\alpha}=B\hat{E}D=\frac{1}{2}\left(B\widehat{D}+C\widehat{A}\right) \text{ و یا } \hat{\beta}=A\hat{E}D=\frac{1}{2}\left(A\widehat{D}+C\widehat{B}\right)$$

دایره محاطی مثلث: عبارت از دایره است که توسط مثلث محاط گردیده باشد.



دایره محیطی مثلث: عبارت از دایره است که مثلث را احاطه نموده و رأس های مثلث بالای محیط دایره مذکور قرار داشته باشد.

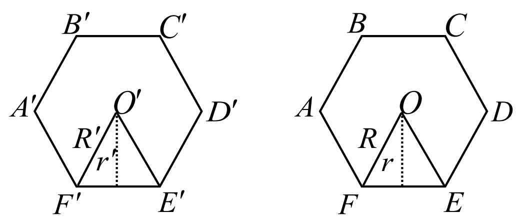


در صورتیکه s نصف محیط مثلث، A مساحت مثلث، r شعاع دایره محاطی و R شعاع دایره محیطی یک مثلث و a,b,c اضلاع مثلث را نشان دهد، در اینصورت:

- شعاع دایره محاطی $r=\frac{A}{s}$
- شعاع دایره محیطی $R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4A}$

به همین ترتیب نسبت بین محیط های دو مضلع منظم که دارای عین تعداد اضلاع اند نسبت بین شعاعات دوایر محیطی و محاطی آن دو مضلع عبارت است از:

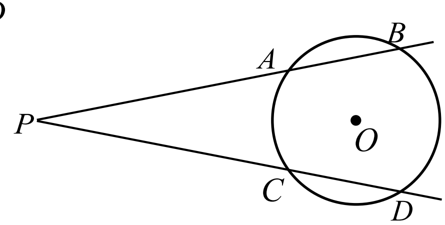
$$\frac{p}{p'}=\frac{R}{R'}=\frac{r}{r'}$$



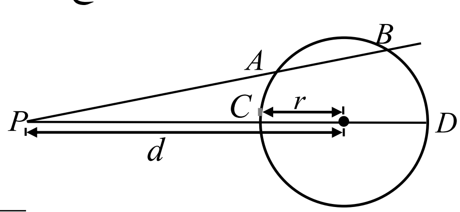
روابط طولی در دایره:

- هرگاه از یک نقطه خارجی P بالای دایره (o,r) دو قاطع رسم گردد، حاصل ضرب هر قاطع در قطعه خارجی آن با همدیگر مساوی است. یعنی

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$



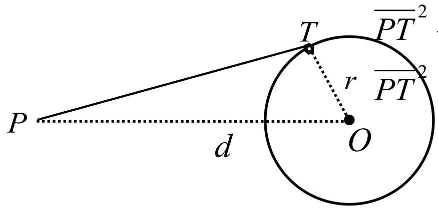
- **طاقت یک نقطه نظر به دایره:** اگر از یک نقطه ثابت در یک مستوی بالای یک دایره دو قاطع طوری رسم گردد که قاطع دومی از مرکز دایره بگذرد، در اینصورت حاصل ضرب قطعات قاطع اولی مساوی به یک مقدار ثابت d^2-r^2 بوده که d فاصله نقطه ثابت الی مرکز دایره و r شعاع دایره را نشان میدهد.یعنی:



$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(PO-CO)(PO+OD)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

رابطه اخیر را به نام طاقت یک نقطه P نظر به دایره (o,r) یاد می کنند. به همین ترتیب میتوان بر دایره یک مماس $\overline{PT}$ را رسم نموده، طوریکه فاصل نقطه P الی مرکز دایره d و شعاع دایره r باشد.

پس با در نظر داشت مثلث قایم الزاویه $P\overset{\Delta}{T}O$ میتوان چنین نوشت:



$$\overline{PT}^2 + r^2 = d^2$$
$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

پس بطور عموم می توان طاقت نقطه P را نظر به دایره (o,r) چنین نوشت:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PC}\cdot\overline{PD} = d^2 - r^2$$

پس نظر به موقعیت نقطه P با دایره (o,r) سه حالت ذیل وجود دارد.

الف- هرگاه نقطه P خارج دایره قرار داشته باشد، در این صورت:

$$d > r \Rightarrow d^2 - r^2 > 0 \Rightarrow P(0) > 0$$

یعنی طاقت نقطه نظر به دایره مثبت گفته می شود.

ب- هرگاه نقطه P روی محیط دایره قرار داشته باشد در اینصورت:

$$d = r \Rightarrow d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow P(0) = 0$$

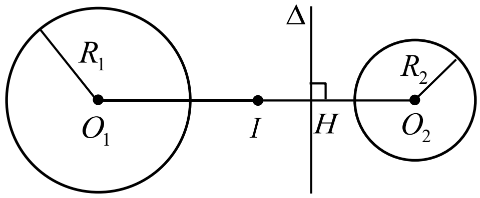
یعنی طاقت نقطه نظر به دایره صفر می باشد.

ج- هرگاه نقطه P داخل دایره قرار داشته باشد، در اینصورت:

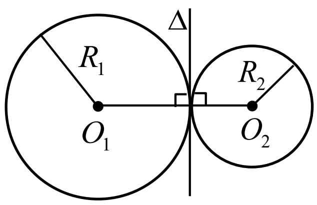
$$d > r \Rightarrow d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow P(0) < 0$$

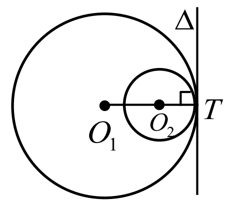
محور جذری: عبارت از محل هندسی نقاطی است که طاقت های آنها نظر به دو دایره با هم مساوی باشند محور جذری نامیده می شود. بخاطر داشته باشید که محور جذری دو دایره همیشه بالای خط و اصل مراکز دوایر عمود می باشد.

- هرگاه دوایر غیر متقاطع باشند، محور جذری بالای خط مرکزین دوایر عمود بوده طوریکه دوایر داده شده را قطع نمی کنند و همچنان فاصله بین محور جذری از نقه تنصیف خط مرکزین دوایر از رابطه ذیل بدست می آید.

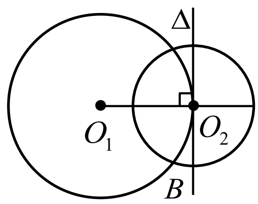


- محور جذری دو دایره با هم مماس عبارت از مماس مشترک آنها می باشد.





- محور جذری دو دایره متقاطع عبارت از وتر مشترک دوایر مذکور می باشد.

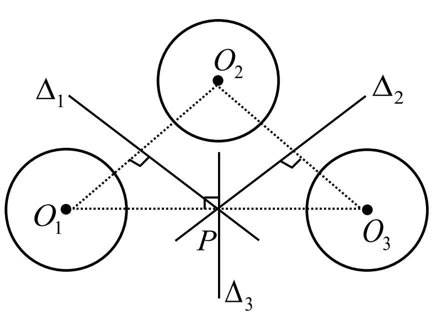


- محور جذری دو دایره متحدالمرکز در بی نهایت قرار دارد، زیرا فاصله $O_1O_2 = 0$ گردیده در نتیجه فاصله بین محور جذری و نقطه تنصیف مرکزین دوایر نظر به رابطه بدست می آید.

$$IH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2O_1O_2}$$

$$IH = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2(0)} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{O} = \infty$$

مرکز جذری: هرگاه بیشتر از دو دوایر که نه متقاطع و نه مماس اند، موجود بوده نقطه مانند P که طاقت آن نظر به دوایر داده شده با هم مساوی باشند، یعنی نقطه تقاطع محورهای جذری دوبدو دوایر عبارت از مرکز جذری دوایر یاد می گردد.



محیط دایره: در صورتیکه r طول شعاع دایره باشد محیط دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

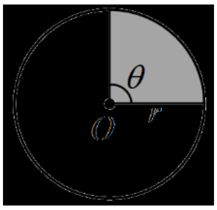
$$P = 2\pi r$$

مساحت دایره: در صورتیکه r طول شعاع دایره را نشان میدهد، مساحت دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

$A = \pi r^2$

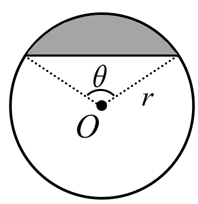
مساحت قطاع دایره: قسمت از سطح دایره که توسط دو شعاع از دایره جدا شده باشد قطاع دایره گفته می شود که مساحت آن از رابطه ذیل بدست می آید.

$$A = \frac{\pi \cdot \theta \cdot r^2}{360} \text{ و یا } A = \frac{1}{2}\theta \cdot r^2$$

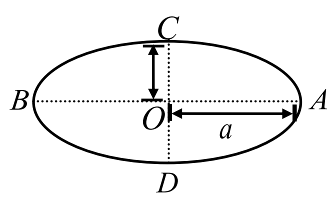


مساحت قطعه دایره: قسمت از سطح دایره که توسط وتر از دایره جدا شده باشد قطعه دایره نامیده می شود که مساحت آن از رابطه ذیل حاصل می گردد.

$$S = \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin\theta)$$



یاداشت: بخاطر داشته باشید در صورتیکه a و b نصف اقطار یک بیضوی (الیپس) را ارائه نماید، محیط الیپس از روابط ذیل بدست می آید.

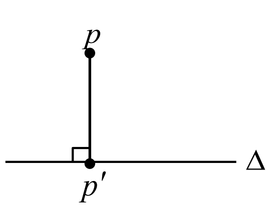


ارتسام قایم:

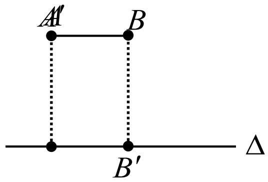
مستقیم Δ را با یک نقطه P خارج این مستقیم در نظر گرفته هرگاه از نقطه عمود pp' را بالای مستقیم Δ (یک مستوی) رسم نماییم، درینصورت p' عبارت از مرتسم قایم p میباشد.

به خاطر داشته باشید که:

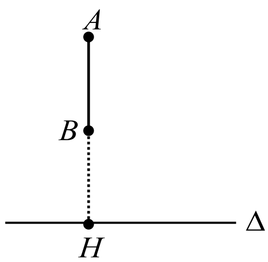
- مرتسم یک نقطه بالای یک مستقیم (مستوی) یک نقطه است.



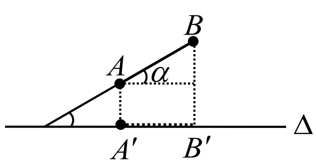
- مرتسم یک قطعه خط که موازی به Δ باشد عبارت از یک مستقیم است طوریکه: $\overline{A'B'} = \overline{AB}$



- مرتسم یک قطعه خط که عمود به Δ باشد عبارت از یک نقطه است طوریکه: $\overline{AB}$



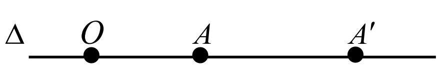
- مرتسم یک قطعه خط که یک انجام آن بروی مستقیم Δ باشد. $A'B' = \overline{AB}\cdot\cos\alpha$



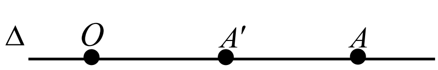
تماثل

بالای خط مستقیم موجه Δ نقاط مستقر O و A را تعیین نموده و یک عدد ثابت $h \neq 0$ را نیز در نظر می گیریم. هرگاه h را به طول OA ضرب نمایم یک طول OA' قرار رابطه $OA' = h \cdot OA$ حاصل می شود. در این صورت عملیه نقطه O را مرکز تماثل و h را نسبت تماثل می نمامند.

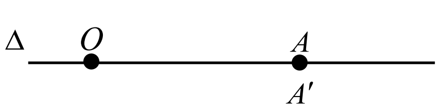
نظر به قیمت های مختف h موقعیت نقطه OA واقع است.



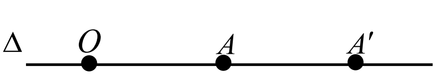
- اگر $h = \frac{1}{2}$ باشد نقطه A' در وسط OA واقع است.



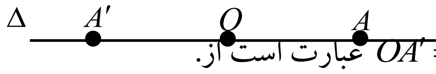
- اگر $h = 1$ باشد نقطه A'بروی A واقع می شود.



- اگر $h = 2$ باشد نقطه A در وسط OA واقع می شود.



- اگر $h=-1$ باشد نقطه A' مساوی و مختلف الجهت A می گردد.



به خاطر داشته باشید که ممثله هر شکل هندسی نظر به رابطه $OA'=h\cdot OA$ عبارت است از.

- ممثله یک نقطه A نظر به تماثل (O,h) عبارت از یک نقطه است.
- ممثله هر خط مستقیم عبارت از یک خط مستقیم است موازی به مستقیم اولی.
- ممثله یک مثلث عبارت از یک مثلث است متشابه به مثلث اولی.
- ممثله یک دایره، یک دایره است. طوری که هر دوی آنها در یک مستوی واقع باشند.

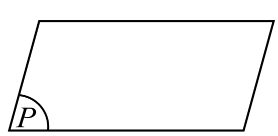
هندسه فضائی

به قسمت از علم هندسه گفته می شود که با مستوی ها، خصوصیات آنها، قضایای مربوط و روابطی که بین اشکال و اجسام هندسی از فضا وجود دارد، بحث می نماید. این هندسه را میتوان سه بعدی نیز تعریف نمود که اساس گذار آن اقلیدوس می باشد.

فضاء از جمله مفاهیم اولیه هندسی بوده که می توان فضا را به حیث مجموعه نقاط قبول نمود.

فضا سه بعدی: به آن فضائی گفته می شود که در آن زندگی می نمایم و اجسام جامد که دارای سه بعد (طول، عرض و ضخامت) اند، در آن مورد مطالعه قرار می گیرد.

مستوی: مستوی نیز از جمله مفاهیم اولیه هندسی بوده که می توان به یک سطح هموار که فقط دو بعد آن یعنی طول و عرض مورد مطالعه باشد، اطلاق نمود. مانند: سطح آب، تخته صنف و غیره مستوی نامید. مانند مستوی P



بخاطر داشته باشید که هر مستوی فضا را بدو حصه تقسیم می نماید.

حالات تعین یک مستوی:

- یک مستوی توسط سه نقطه که به امتداد یک خط مستقیم واقع نباشند تعیین می گردد.
- یک مستوی توسط یک خط مستقیم و یک نقطه بشرط آنکه نقطه در امتداد خط مستقیم واقع نباشد تعیین می گردد.
- یک مستوی توسط دو قطعه خط مستقیم متقاطع تعیین گردیده می تواند.
- یک مستوی توسط دو قطعه خط موازی تعیین گردیده می تواند.

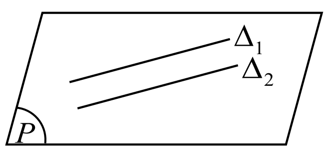
نظر به عکس حالات فوق می توان گفت که:

- یک نقطه بی نهایت مستوی ها را تعیین می نماید.
- دو نقطه بی نهایت مستوی ها را تعیین می نماید.
- چندین نقاط که به امتداد یک خط مستقیم واقع باشند بی نهایت مستوی ها را تعیین می نماید.
- یک قطعه خط مستقیم بی نهایت مستوی ها را تعیین نموده می تواند.

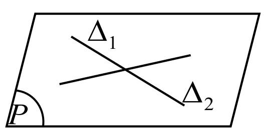
حالات نسبی دو خط مستقیم در یک مستوی نظر به یکدیگر در فضا:

هرگاه دو خط مستقیم Δ_1 و Δ_2 در یک مستوی در فضا موجود باشند حالات ذیل امکان پذیر است.

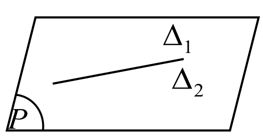
- خطوط موازی اند در صورت که هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



- خطوط متقاطع اند در صورتیکه یک نقطه مشترک داشته باشند.



- خطوط منطبق اند در صورتیکه اقلاً دو نقطه مشترک داشته باشند.

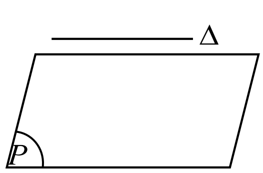


خطوط متنافر (سیاری): دو خط مستقیم که در فضا شامل دو مستوی زمانی متنافر (سیاری) گفته می شوند که با هم هیچ ارتباط نداشته باشند یعنی نه موازی، نه متقاطع و نه منطبق باشند.

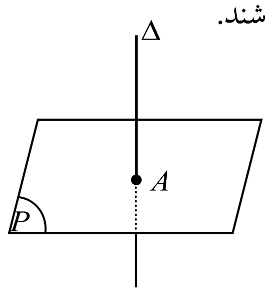
حالات یک مستقیم و یک مستوی در فضا:

هر یک مستقیم Δ و یک مستوی P را در فضا در نظر بگیریم بین آنها سه حالت ذیل وجود دارد:

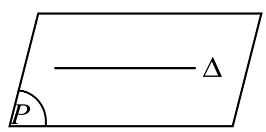
- خط مستقیم با مستوی موازی گفته می شود زمانیکه هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



- خط مستقیم را مستوی متقاطع گفته می شود زمانیکه آنها یک نقطه مشترک داشته باشند.

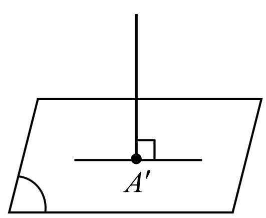


- خط مستقیم با مستوی منطبق گفته می شود وقتی تمام نقاط مستقیم شامل مستوی باشد.

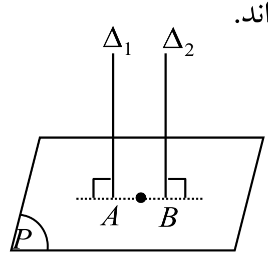


حالات خصوصی مستقیم با مستوی:

الف – از یک نقطه فضا بالای مستوی فقط یک عمود رسم شده می تواند.

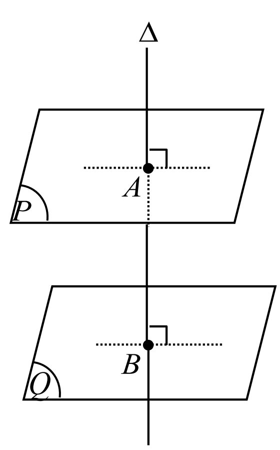


ب – هرگاه دو خط مستقیم در یک مستوی عمود باشد، مستقیم ها با هم موزی اند.



$$\begin{matrix}\Delta_1 \perp P \\ \Delta_2 \perp P\end{matrix} \Rightarrow \Delta_1 // \Delta_2$$

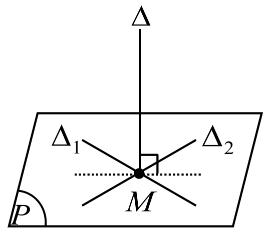
ج – هرگاه یک خط مستقیم به طور همزمان بالای دو مستوی غیر منطبق عمود باشد، مستوی های مذکور با همدیگر موازی می باشند.



$$\begin{matrix}\Delta_1 \perp P \\ \Delta_2 \perp Q\end{matrix} \Rightarrow P // Q$$

د – هرگاه یک مستقیم با دو مستقیم متقاطع شامل یک مستوی عمود باشد، مستقیم مذکور بالای خود مستوی نیز عمود می باشد.

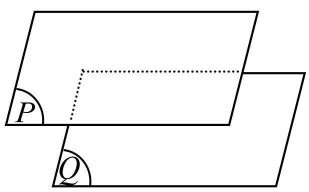
$$\begin{matrix}\Delta \perp \Delta_1 \\ \Delta \perp \Delta_2\end{matrix} \Rightarrow \Delta // P$$



حالات دو مستوی در فضا:

دو مستوی P، Q را در فضا در نظر گرفته حالات ذیل وجود دارد:

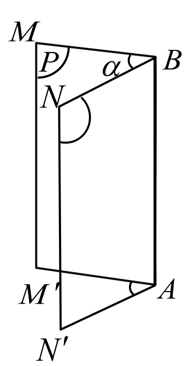
- دو مستوی با هم موازی اند وقتی هیچ نقطه مشترک نداشته باشند.



- دو مستوی با هم متقاطع اند زمانیکه اقلاَ یک نقطه مشترک داشته باشند، که همیشه تقاطع دو مستوی یک خط مستقیم می باشد مانند AB که بنام فصل مشترک مستوی ها یاد می گردد. به همین ترتیب زاویه که در این حالت بین مستوی های مذکور تشکیل می گردد بنام زوایای دو وجهی یاد می گردد که با هم مساوی اند. یعنی:

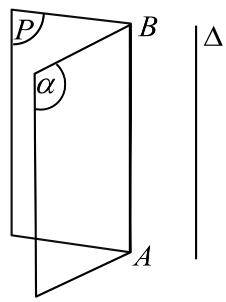
فصل مشترک مستوی ها $\overline{AB}$

$M\hat{B}N = M\hat{A}N = \alpha$ زوایای دو وجهی مستوی ها می باشد.



بخاطر داشته باشید که

هرگاه یک مستقیم به هر یک از دو مستوی متقاطع موازی باشد، مستقیم مذکور به فصل مشترک مستوی ها نیز موازی می باشد.

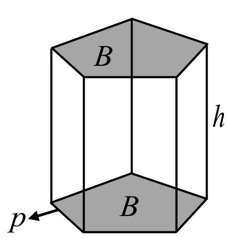


$$\begin{rcases} \Delta \perp P \\ \Delta \perp Q \end{rcases} \Rightarrow \Delta // \overline{AB}$$

- دو مستوی با هم منطبق گفته می شوند وقتی که تمام نقاط آنها با هم مشترک باشند، با نقاط آنها شامل یکدیگر باشند.

منشور: عبارت از جسم جامد هندسی است که توسط سطح منشوری و و مستوی متوازی که با خط الرأس های سطح منشوری موازی نباشد، محدود گردیده باشد.

در صورتیکه P محیط قاعده h ارتفاع خط الرأس، B مساحت سطح قاعده منشور را ارائه نمائید، پس داریم که:

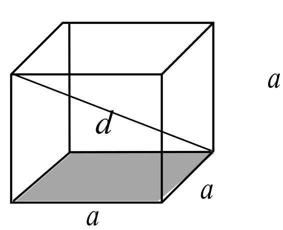


مساحت جانبی $S = p \cdot h$

مساحت کلی $A = S + 2B$

حجم $V = B \cdot h$

مکعب: عبارت از منشوری قائیم است که وجود آن مربعات باشد، یا به عباره دیگر منشوری منظم چهار ضلعی القاعده که تمام وجود آن انطباق پذیر باشد، مکعب نامیده می شود.



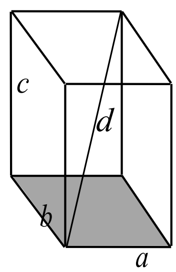
مساحت جانبی $S = 4a^2$

مساحت کلی $A = 6a^2$

حجم $V = a^3$

قطر $d = \sqrt{3} \cdot a$

معکب مستطیل: عبارت از منشور قایم که وجوه آن مستطیل ها باشد، مکعب مستطیل نامیده می شود یا به عباره دیگر هرگاه وجود یک منشور دوبدو با هم انطباق پذیر باشد، مکعب مستطیل نامیده می شود.



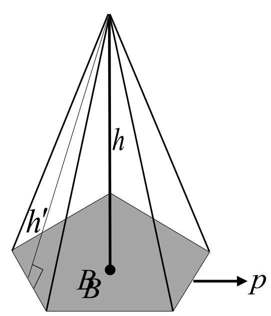
مساحت جانبی $S = 2(bc+ac)$

مساحت کلی $S = 2(ab+bc+ac)$

حجم $V = a\cdot b\cdot c$

قطر $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

هرم: هرگاه یک ساحه چند ضلعی B در یک مستوی P و یک نقطه S فضا که خارج مستوی P موجود باشد، هرم با قاعده B و رأس S عبارت از اتحاد تمام خطوط مربوط ساحهٔ B می باشد. هر وجه یک هرم مثلث بوده طوریکه ارتفاع مثلث (h') ارتفاع جانبی هرم و خط که از رأس هرم بالای قاعده آن عمود باشد. (h) عبارت از ارتفاع هرم نامیده می شود.



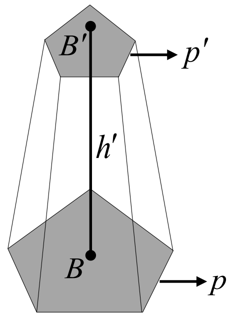
مساحت جانبی $S=\frac{1}{2}p\cdot h'$

مساحت کلی $A=S+B$

حجم $S=\frac{1}{3}B\cdot h$

هرم ناقص:

هرگاه یک هرم توسط مستوی موازی با قاعده قطع گردد، حجم حاصله عبارت از هرم ناقص می باشد. در صورتیکه h ارتفاع هرم و k ارتفاع مقطع هرم از رأس و B مساحت قاعدهٔ هرم و B' مقطع هرم. به همین ترتیب P محیط قاعده و P' محیط قاعدهٔ مقطع هرم، l' ارتفاع جانبی هرم ناقص و h' ارتفاع قایم هرم ناقص را نشان دهد.



پس روابط ذیل وجود دارد: $h'=h-k$ و $\frac{B'}{B}=\frac{k^2}{h^2}$ است:

مساحت جانبی $S=\frac{1}{2}(P+P')\cdot l'$

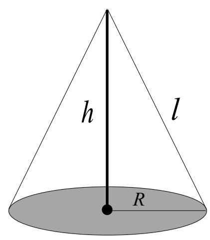
مساحت کلی $A=S+B+B'$

حجم هرم ناقص $V=\frac{h'}{3}\left(B+B'+\sqrt{B\cdot B'}\right)$

مخروط: هرگاه یک دایره (O) شامل مستوی P و یک نقطه S فضا خارج مستوی p موجود باشد، تمام خطوط مستقیم که از نقطه S به شامل سطح دایره در مستوی P بوجود می آید، مخروط نامیده می شود.

یا به عباره دیگر، هرگاه اضلاع مضلع قاعده یک هرم به بی نهایت تقرب نماید، مخروط حاصل می گردد.

در صورتیکه l ارتفاع جانبی (مولد) مخروط و h ارتفاع قایم و R شعاع قاعده مخروط را نشان دهد، پس داریم که:

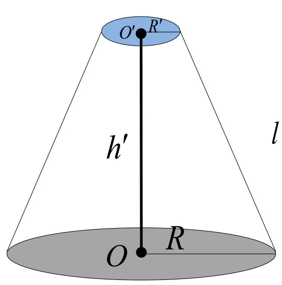


$$S = \pi R \cdot l$$
$$A = \pi R(l + R)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h$$

مخروط ناقص:

هرگاه یک مخروط توسط مستوی موازی به قاعده قطع گردد، مخروط ناقص بوجود می آید.

در حالیکه R شعاع دایره مخروط، R' شعاع دایره مقطع، l' ارتفاع جانبی، h' ارتفاع قایم مخروط ناقص، k ارتفاع قایم مقطع مخروط از رأس و h ارتفاع قایم مخروط را نشان دهد، پس روابط ذیل وجود دارد:



$$\frac{B'}{B} = \frac{k^2}{h^2} \Rightarrow \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = \frac{k^2}{h^2} \Rightarrow \frac{R'}{R} = \frac{k}{h}$$ و $$h' = h - k$$

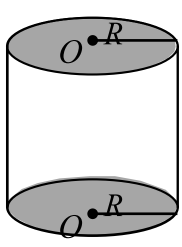
مساحت جانبی $S = \pi(R + R') \cdot l'$

مساحت کلی $A = S + B + B'$

$$A = [\pi(R + R') \cdot l' + R^2 + R'^2]$$

حجم مخروط ناقص $V = \frac{1}{3}\pi h'(R^2 + R'^2 + RR')$

استوانه: هرگاه اضلاع مضلعات یک منشور به بی نهایت تقرب نماید، حجم شکل بدست آمده استوانه نامیده می شود. (درحالیکه R شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه را نشان دهد، داریم که:

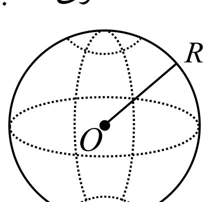


مساحت جانبی $S = 2\pi R \cdot h$

مساحت کلی $A = 2\pi R(h + R)$

حجم $A = \pi R^2 \cdot h$

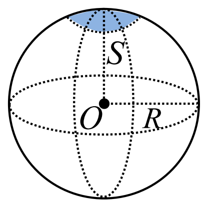
کره: کره عبارت از ست تمام نقاط فضا است که فاصله آنها از نقطه O دارای فاصله مساوی R باشد.



مساحت سطح کره $A = 4\pi R^2$

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

و مساحت مقطع یک کره $A' = \pi R^2 - \pi S^2$



هندسه تحلیلی

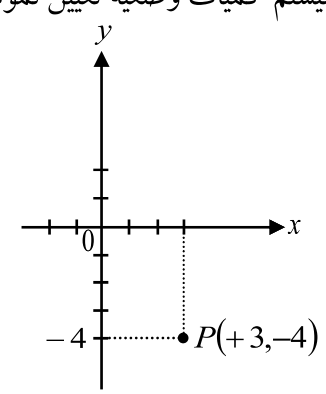
بخش از علم هندسه بوده که عبارت از علم ارتباط بین الجبر و هندسه است، طوریکه برای معادله الجبری شکل هندسی را بیان کند و برای هر شکل هندسی یک معادله الجبری را معین می سازد، که اساس گذار این هندسه عالم فرانسوی بنام دیکارت می باشد.

سیستم کمیات وضعیه قایم:

دو خط مستقیم به همدیگر عمود، که در هر کدام شان جهت های مثبت و منفی را تعیین می نماید و این مستقیم ها مستوی سطح را به چهار ناحیه تقسیم می نمایند به نام سیستم کمیات ناحیه قایم یاد می گردد.

می توان موقعیت هر نقطه مستوی را به وسیله جوره های مرتب $P(x,y)$ روی سیستم کمیات وضعیه تعیین نمود.

مثلاً موقعیت نقطه $P(+3,-4)$ عبارت از:



فاصله بین دو نقطه: در صورتیکه $P(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ معین باشد، فاصله بین آنها عبارت از:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

تقسیم یک قطعه خط به نسبت $\frac{m}{n}$: در حالیکه قطعه خط مستقیم که مختصات انجام های آن $P_1(x_1, y_1)$ و $P(x, y_2)$ باشد و آنرا داخلاً به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم نمایم مختصات نقطه P عبارت از:

$$p\left(x = \frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, y = \frac{ny_1 + my_2}{n+m}\right)$$

به خاطر داشته باشید اگر خط مذکور جارجاً تقسیم گردد نسبت مذکور $-\frac{m}{n}$ می گردد.

مختصات نقطه تنصیف قطعه خط: در صورتیکه $m = n$ باشد قطعه خط مستقیم که انجام های آن $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ باشد، پس مختصات آن عبارت از:

$$p\left(x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

میل خط مستقیم که انجام های آن داده شده باشد: قطعه خط مستقیمی که انجام های آن $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ باشد، میل خط مذکور از رابطه ذیل بدست می آید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

همچنان قابل یاد آوریست که:

$$m = \tan\theta$$

معادلات خط مستقیم و شرایط مربوط آن: شکل عمودی معادله خط مستقیم عبارت از: $y = mx + b$ و $Ax + by + C = 0$ بوده، در صورتیکه $\begin{cases} y = m_1 x + b_1 \\ y = m_2 x + b_2 \end{cases}$ یا $\begin{cases} A_1 x = B_1 y + C_1 = 0 \\ A_2 x = B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$ سیستم معادلات خط مستقیم را ارائه نماید، داریم که:

- **شرط موازات:**

$$b_1 \neq b_2 \text{ و } m_1 = m_2 \text{ یا } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_1}$$

- **شرط متقاطع (عمودیت)**

متقاطع $\quad b_1 = b_2$ و یا $b_1 \neq b_2 \; , \; m_1 \neq m_2$

شرط عمودیت $\quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$ و یا $m_1 \cdot m_2 = -1$

متقاطع $\quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$

شرط عمودیت $\quad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$

- **شرط منطبق بودن**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \text{ یا } b_1 = b_2 \text{ ،} m_1 = m_2$$

دریافت معادلات خط مستقیم: بطور عموم در سه حالت ذیل معادله خط مستقیم را دریافت نمود.

- یک نقطه $P(x_1, y_1)$ و میل (m) معلوم باشد، معادله آن عبارت از:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- دو نقطه آن $P(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ معلوم باشد، معادله آن عبارت از:

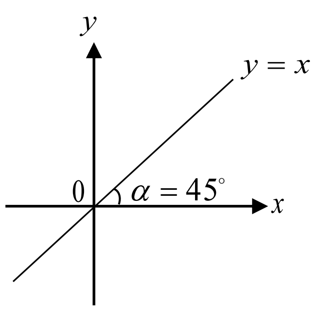
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- تقاطع به محورات x به اندازه a و y به اندازه b معلوم باشد، معادله آن عبارت از:

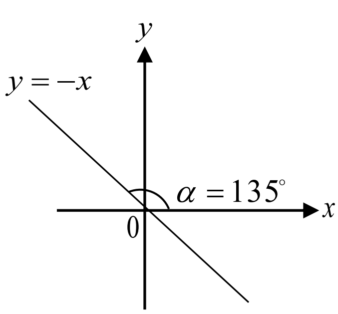
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

حالات خصوصی معادله خط مستقیم:

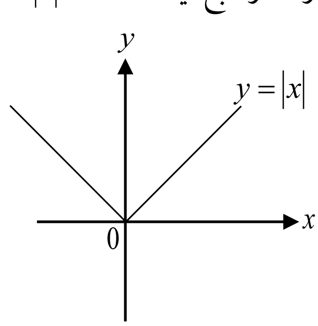
- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه اول و سوم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از: $y = x$



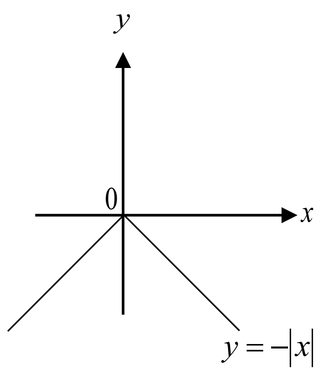
- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه دوم و چهارم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از: $y = -x$



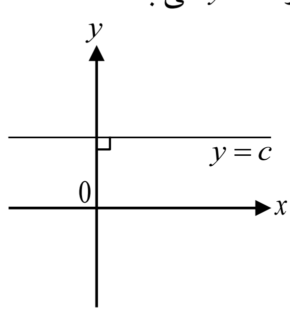
- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه اول و دوم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از تابع قیمت مطلقه $y = |x|$ می باشد.



- معادله خط مستقیم که ناصف ناحیه سوم و چهارم کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت از تابع قیمت مطلقه $y=-|x|$ می باشد.

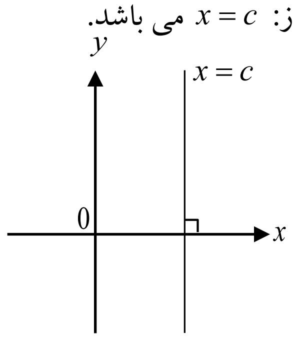


- معادله خط مستقیم که موازی با محور x (عمود با محور y) باشد عبارت از $y=c$ می باشد.



با در نظر داشت معادله فوق معادله محور x عبارت از $y=0$ می باشد.

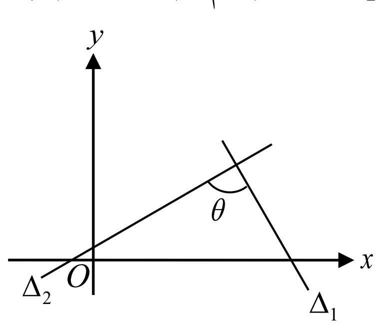
- معادله خط مستقیم که موازی با محور y (عمود با محور x) باشد عبارت از: $x=c$ می باشد.



با در نظر داشت معادله فوق معادله محور y عبارت از $x=0$ می باشد.

زاویه بین دو خط مستقیم: در صورتیکه مستقیم Δ_1 و Δ_2 روی سیستم کیمات وضعیه با هم تحت زاویه θ متقاطع باشند، زاویه بین آنها از رابطه ذیل بدست می آید.

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1+m_2}$$

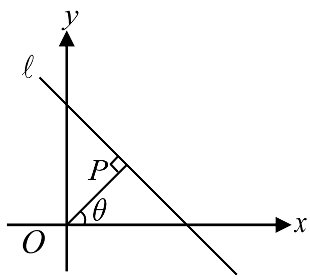


فاصله عمودی یک نقطه از یک خط مستقیم: فاصله عمودی بین نقطه $P(x_1, y_1)$ از خط مستقیم $Ax + By + C = 0$ از رابطه ذیل به دست می آید:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

معادله نارمل خط مستقیم: در صورتیکه معادله یک خط مستقیم l بوده و این خط از مبدأ کمیات وضعیه عمودی P و زاویه میل این فاصله θ باشد. پس معادله نارمل خط مستقیم عبارت از:

$$x \cdot \cos\theta + y \sin\theta - P = 0$$



تبدیل معادله خط مستقیم به شکل نارمل:

هرگاه شکل عمومی معادله خط $Ax + By + C = 0$ را به شکل نارمل تبدیل نمایم از رابطه ذیل استفاده می نمایم.

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} \pm \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

مثلاً معادله $-x + y - 3 = 0$ را به شکل نارمل تبدیل نمایید.

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{-1x}{+\sqrt{2}} + \frac{1y}{+\sqrt{2}} - \frac{3}{+\sqrt{2}} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} y - \frac{3}{+\sqrt{2}} = 0$$

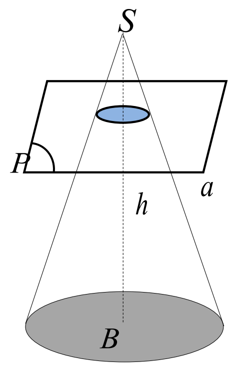
$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \theta = 135^\circ$$

$$\cos 135 \cdot x + \sin 135 \cdot y - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$$

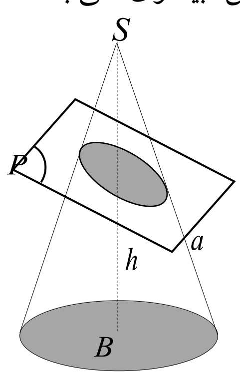
متقاطع مخروطی

هرگاه یک مستوی P را با یک مخروط با قاعده B ارتفاع قایم (محور اصلی) h مولد a و رأس S در نظر بگیریم مستوی مذکور می تواند مخروط را در حالات ذیل قطع نماید.

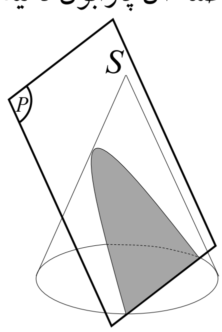
- هرگاه مستوی مخروط را موازی با قاعده آن قطع نماید یا به عباره دیگر عمود به محور اصلی قطع حاصله آن دایره می باشد.



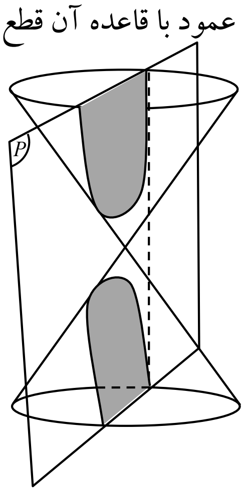
- هرگاه مستوی مخروط را مایل به محور اصلی قطع نماید قطع حاصله آن الیپس (بیضوی) می باشد.



- هرگاه مستوی مخروط از موازی به مولد (ارتفاع جانبی) آن قطع نماید قطع حاصله آن پارابول نامیده می شود.



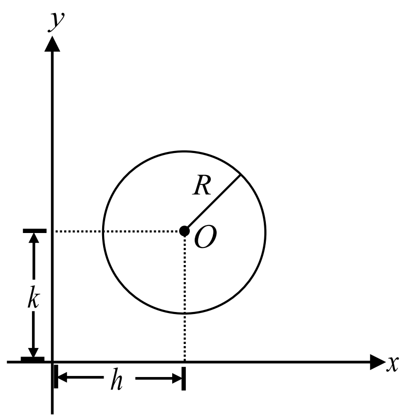
- هرگاه دو مخروط دارای رأس های منطبق و قاعدتین موازی باشد و توسط مستوی عمود با قاعده آن قطع گردد، های پارابول نامیده می شود.



دایره: محل هندسی نقاط که از یک نقطه معین دارای فاصله مساوی باشد دایره نامیده می شود.

معادلات دایره: در حالیکه $o(h,k)$ مرکز و R شعاع دایره باشد. معادله معیاری از دایره عبارت از:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$$



حالات خصوصی معادله دایره:

- اگر دایره با محور x مماس باشد: در این صورت $|k|=R$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-h)^2+(y-R)^2=R^2$$
- اگر دایره با محور y مماس باشد: در این صورت $|h|=R$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-R)^2+(y-k)^2=R^2$$
- اگر دایره با هر دو محور مماس باشد: در این صورت $|k|=|h|=R$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$$
- اگر مرکز دایره بالای محور x باشد: در این صورت $k=0$، گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$(x-h)^2+y^2=R^2$$
- اگر مرکز دایره بالای محور y باشد: در این صورت $h=0$، گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$x^2+(y-k)^2=R^2$$
- اگر مرکز دایره بالای مبدأ کمیات وضعیه باشد: در این صورت $h=k=0$ گردیده و معادله دایره عبارت از:
$$x^2+y^2=R^2$$

یادداشت: شرط عبور دایره از مبدأ کمیات وضعیه عبارت است از: $h^2+k^2=R^2$

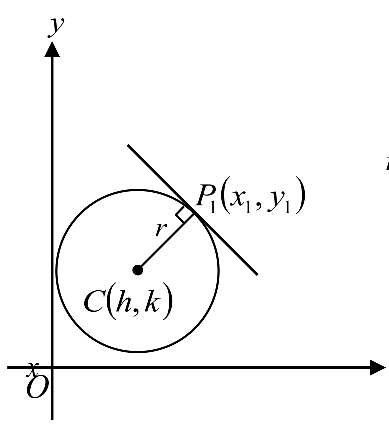
معادله انکشاف یافته دایره: هرگاه معادله معیاری دایره انکشاف داده شود معادله انکشاف یافته ذیل بدست می آید: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ معادله فوق زمان معادله دایره گفته می شود که $A=B$ و هم اشاره باشد.

$c\left(-\frac{D}{2},\frac{F}{2}\right)$ مرکز و $R=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ شعاع دایره می باشد.

در معادله انکشاف یافته بخاطر داشته باشید که هرگاه:

- $R>0$ باشد، دایره را حقیقی می گویند.
- $R=0$ باشد، دایره را صفری می گویند.
- $R<0$ باشد، دایره را موهومی می گویند.

معادله مماس بر دایره: هرگاه یک مستقیم در نقطه $P_1(x_1,y_1)$ با دایره یی با مرکز $c(h,k)$ مماس باشد، با در نظر داشت شکل ذیل میل شعاع دایره عبارت از:



$$m_1=\frac{k-y_1}{h-x_1}\text{،}\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

چون شعاع دایره در نقطه تماس بالای مماس دایره عمود است، بناً:

$$m_1=-\frac{1}{m_1}\Rightarrow m_2=-\frac{h-x_1}{k-y_1}$$

و معادله خط مستقیم که یک نقطه و میل آن معلوم باشد عبارت از:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

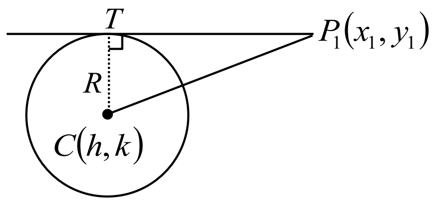
معادله اخیر عبارت از معادله مماس بر دایره است.

هرگاه مرکز دایره در مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد $h=k=0$ گردد، پس معادله مماس به دایره عبارت از:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

طول مماس دایره: هرگاه یک نقطه $P_1(x_1,y_1)$ خارج دایره با معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=R^2$ رسم گردد، طول مماس مذکور با در نظر داشت قضیه فیثاغورث از رابطه ذیل به دست می آید:

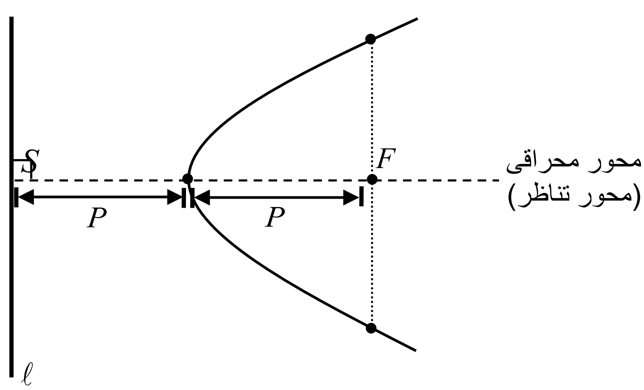
$$\overline{P_1T}^2 = \overline{P_1C}^2 - \overline{TC}^2$$
$$P_1T = \sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-R^2}$$



دوایر قایم: هرگاه دو دایره با معادله $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ و $x^2+y^2+D_2x+E_2y+y+F_2=0$ در نظر باشد، شرط لازم برای اینکه دوایر مذکور با هم قایم باشند، عبارت از:

$$D_1P_2+E_1E_2=2(F_1+F_2)$$

پارابول: محل هندسی نقاط که از یک نقطه ثابت و یک مستقیم متساوی الفاصله باشد پارابول نامیده میشود. نقطه ثابت F محراق پارابول، مستقر (l) خط مؤجه (هادی) پارابول و خط مستقیم که از محراق پارابول گذشته و بالای خط مؤجه عمود باشد محور محراقی (محور تناظر) پارابول یاد می گردد، همچنان نقطه تقاطع منحنی پارابول با محور محراقی را (S) رأس پارابول و فاصله P عبارت از پارامتر پارابول نامیده می شود.
همچنان خطی که ار محراق گذشته و دو نقطه منحنی پارابول را وصل می کند وتر پارابول و اگر محراق بگذرد وتر محراقی یا وتر عمودی گفته می شود که طول آن $L=4P$ می باشد.



معادلات پارابول

حالت اول: هرگاه محور محراقی موازی به محور x باشد،

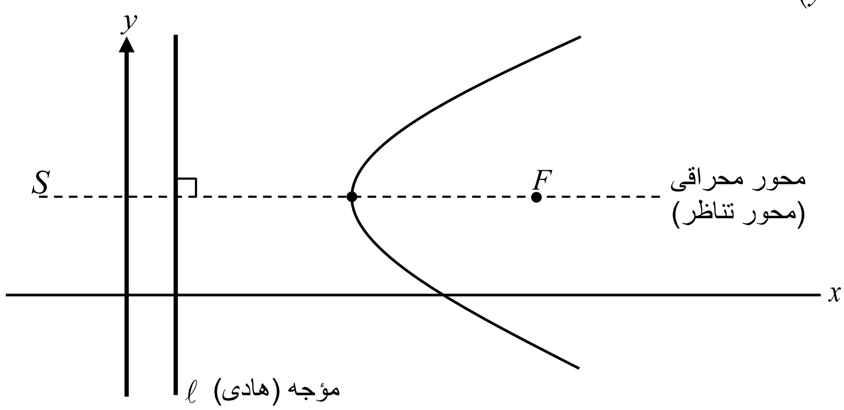
معادله پارابول $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

مختصات رأس $S(h,k)$

مختصات محراق $F(h+p,k)$

خط مؤجه (هادی) $x = h - p$

محور تناظر (محراقی) $y = k$



هرگاه رأس پارابول در مبدأ کمیات قرار داشته باشد در این صورت: $h = k = 0$ گردیده و معادله پارابول عبارت از: $y^2 = 4px$

بخاطر داشته باشید که هرگاه $P < 0$ باشد دهنه پارابول بطرف چپ باز می باشد.

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد.

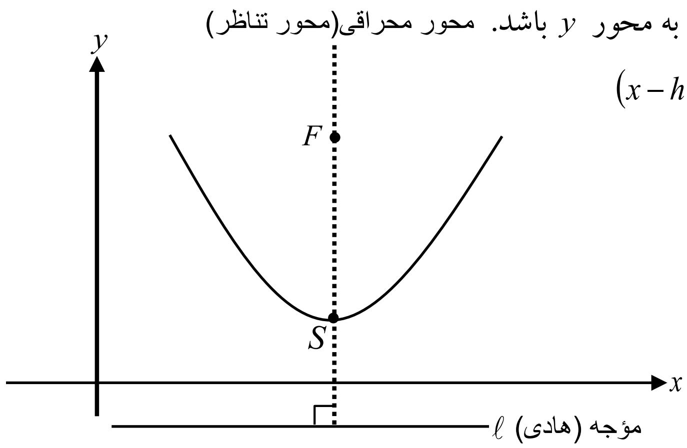
معادله پارابول عبارت از: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

مختصات رأس $s(h,k)$

مختصات محراق $F(h,k+p)$

خط مؤجه (هادی) $y = k - p$

محور تناظر (محراقی) $x = h$



هرگاه رأس پارابول در مبدأ کمیات قرار گیرد در این صورت: $h = k = 0$ گردیده و معادله پارابول عبارت از:

$x^2 = 4py$

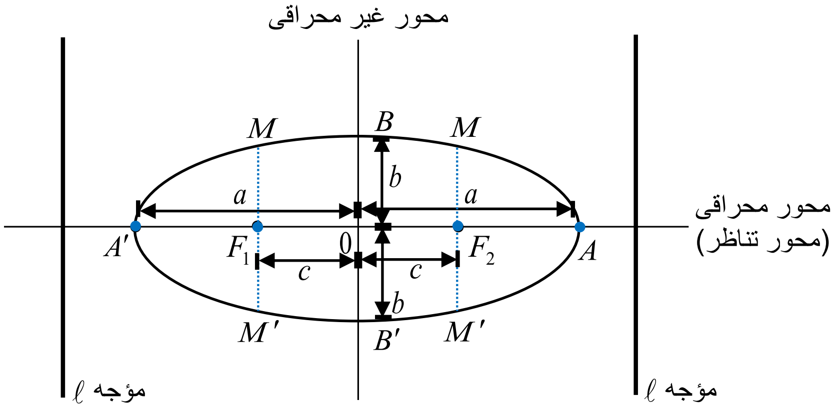
بخاطر داشته باشید که هرگاه $P > 0$ باشد دهنه پارابول بطرف بالا و اگر $P < 0$ باشد دهنه پارابول بطرف پایین باز می باشد.

الیپس (بیضوی): محل هندسی نقاط که مجموعه فواصل آنها از دو نقطه مستقر در مستوی مساوی به یک عدد ثابت $(2a)$ گردد، الیپس نامیده می شود. نقاط ثابت (F_1) و (F) محراق های الیپس یاد می گردد. طوریکه نقطه تنصیف محراق ها را $o(h,k)$ مرکز الیپس و فاصله F_1F_2 را فاصله محراقین الیپس یاد می نمایند. همچنان

خط مستقیمی که از محراق های الیپس گذشته و محیط الیپس را در دو نقطه A و A' قطع نماید محور محراقی (محور تناظر) الیپس و نقاط A و A' بنام رأس های الیپس یاد می گردد. طوریکه فاصله $\overline{AA'}$ قطر اطول الیپس یاد می گردد، به همین ترتیب خط مستقیم که از مرکز الیپس یاد می گردد، این خط منحنی الیپس را در دو نقطه B و B' قطع می نماید که این نقاط نیز بنام رأس های الیپس یاد می گردد، طوریکه فاصله $\overline{BB'}$ قطر اصغر الیپس یاد می گردد.

عن المرکزیت الیپس: عبارت از نسبت فاصله بین هر نقطه منحنی الیپس از محراق و مستقیم مؤجه (هادی) الیپس می باشد، که در بیضوی این نسبت همیشه کوچک تر از یک می باشد، یعنی $e<1$ است.

وتر عمودی (لتس ریکتم): عبارت از خط مستقیم است که از محراق الیپس گذشته و بالای محور محراقی عمود باشد و منحنی الیپس را در دو نقطه قطع نماید.

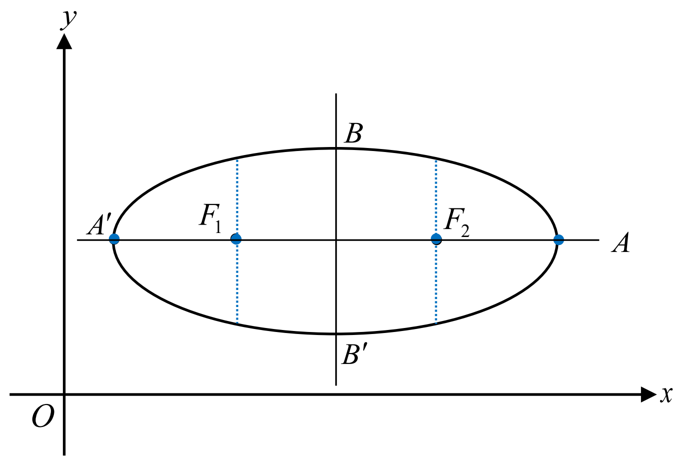


بخاطر داشته باشید که در الیپس همیشه $a>b$ و $a>c$ بوده و جزئیات الیپس عبارت از:

قطر اطول الیپس	$AA'=2a$
قطر اصغر الیپس	$BB'=2b$
فاصله محراقین الیپس	$F_1F_2=2c$
عن المرکزیت الیپس	$e=\dfrac{c}{a}$
وتر عمودی (لتس ریکتم) الیپس	$MM'=L=\dfrac{2b^2}{a}$
رابطه الیپس	$c^2=a^2-b^2$

معادلات الیپس

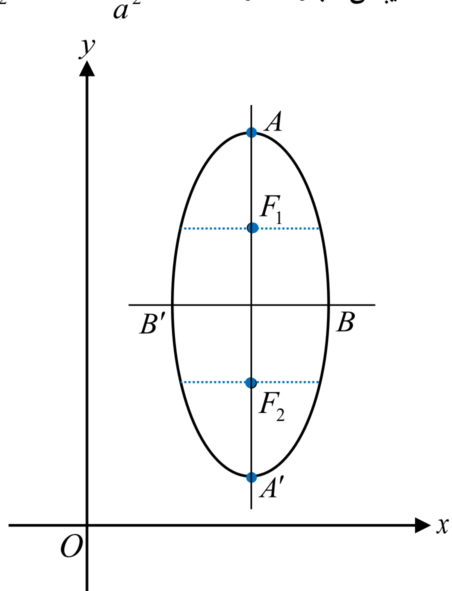
حالت اول: هرگاه محور محراقی موازی به محور x باشد، معادله الیپس عبارت از: $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



مختصات مرکز الیپس	$O(h,k)$
مختصات رأس ها	$AA'(h\pm a,k)$
مختصات رأس ها	$BB'(h,k\pm b)$
مختصات محراق ها	$F_1F_2(h\pm c,k)$
معادلات خطوط مؤجه (هادی)	$x=h\pm\frac{a}{e}$
معادله محور محراقی (محور تناظر)	$y=k$
معادله محور غیر محراقی	$x=h$

در صورتیکه مرکز الیپس در مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد در این صورت $h=k=0$ گردیده و معادله الیپس شکل ذیل را بخود اختیار می نماید:

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد، معادله الیپس عبارت از: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$



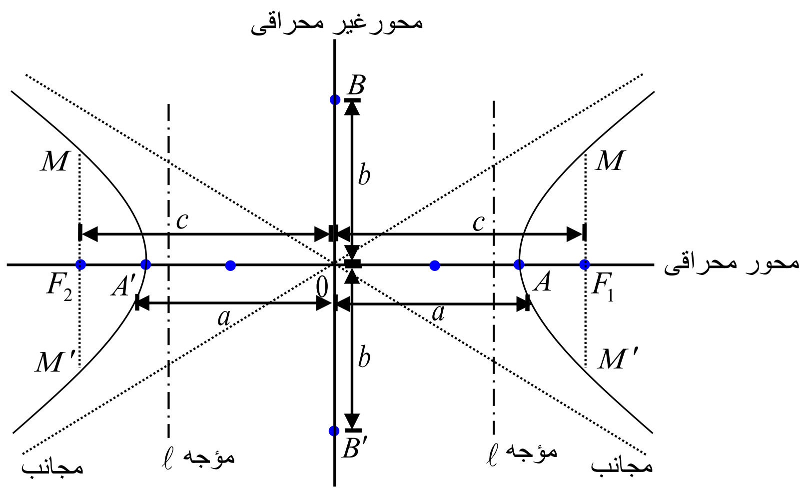
مختصات مرکز	$O(h,k)$
مختصات رأس ها	$A(h\pm a,k)$
مختصات رأس ها	$B(h\pm b,k)$
مختصات محراق ها	$F(h,k\pm c)$
معادلات خطوط مؤجه (هادی)	$x=k\pm\frac{a}{e}$
معادله محور محراقی (محور تناظر)	$x=h$

معادله محور غیر محراقی $y = k$

هایپرابول: محل هندسی نقاطی که حاصل تفریق فواصل شان از دو نقطه مستقر در مستوی مساوی به یکی عدد ثابت $2a$ باشد، هایپرابول نامیده می شود. این دو نقطه ثابت F_1 و F_2 محراقین هایپرابول می گویند، نقطه تنصیف محراق ها O مرکز و هایپربول یاد می گردد.

خط مستقیم که از محراق های هایپرابول گذشته بنام محور محراقی (محور تناظر) یاد می گردد، این مستقیم منحنی هایپرابول را در نقاط A و A' قطع می کند که بنام رأس های حقیقی یاد می گردد، به همین ترتیب خط مستقیم که از مرکز هایپرابول گذشته و بالای محور محراقی عمود باشد، بنام محور غیر محراقی یاد می گردد روی این محور نقاط متناظر B و B' قرار دارد که بنام رأس های غیر واقعی یاد می گردد.

به همین ترتیب خطوط مستقیم که از مرکز هایپرابول گذشته و یا منحنی هایپرابول در بی نهایت مماس باشد، مجانب های هایپرابول نامیده می شود.



بخاطر داشته باشید که در هایپرابول عن المرکزیت $e>1$بوده و $a>b$ یا $a>b$ و$a=b$ بوده و همیشه $c>a$ است که جزئیات هایپرابول عبارت از:

فاصله رأس های حقیقی هایپرابول $AA' = 2a$

فاصله رأس های غیر حقیقی هایپرابول $BB' = 2b$

فاصله محراقین هایپرابول $F_1F_2 = 2c$

عن المرکزیت هایپرابول $e = \dfrac{c}{a}$

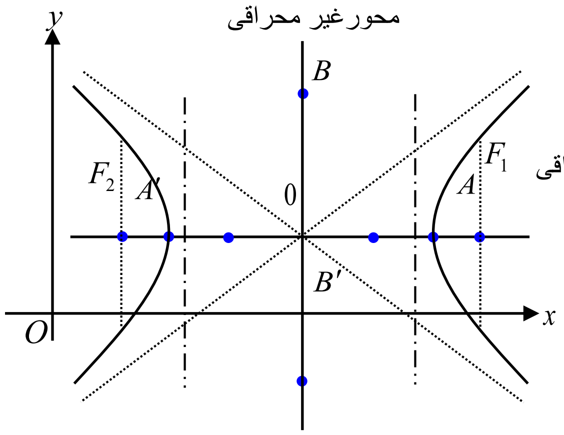
وتر عمودی (لتس ریکتم) هایپرابول $MM' = L = \dfrac{2b^2}{c}$

رابطه هایپرابول $c^2 = a^2 + b^2$

معادلات هایپرابول

حالت اول: هرگاه محور محراقی موازی به محور x باشد، معادله هایپرابول عبارت از:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



مختصات مرکز $O(h,k)$

مختصات رأس های حقیقی هایپرابول $AA'(h \pm a, k)$

مختصات رأس های غیر حقیقی هایپرابول $BB'(h, k \pm b)$

مختصات محراق های هایپرابول $F_1F_2(h \pm c, k)$

معادلات مجانب های هایپرابول $y - k = k \pm \frac{a}{e}(x-h)$

معادله خطوط مؤجه (هادی) $x = h \pm \frac{a}{e}$

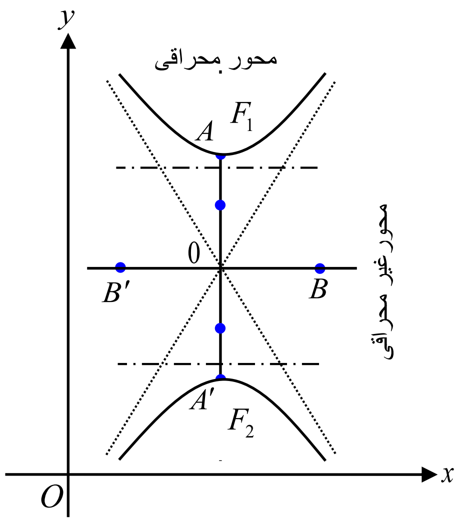
معادله محور محراقی (محور تناظر) $y = k$

معادله محور غیر محراقی $x = h$

هرگاه مرکز هایپرابول بالای مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد در اینصورت $h = k = 0$ گردیده و معادله هایپرابول شکل ذیل را بخود اختیار می نماید: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

حالت دوم: هرگاه محور محراقی موازی به محور y باشد، معادله هایپرابول عبارت از:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$



مختصات مرکز	$O(h,k)$
مختصات رأس های حقیقی	$A(h,k\pm a)$
مختصات رأس های غیر حقیقی	$B(h\pm b,k)$
مختصات محراق ها	$F(h,k\pm c)$
معادله مجانب ها	$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$
معادله محور محراقی (محور تناظر)	$x=h$
	$y=k\pm\frac{a}{e}$
معادله محور غیر محراقی	$y=k$

هرگاه مرکز هایپرابول بالای مبدأ کمیات وضعیه قرار گیرد، در اینصورت $h=k=0$ گردیده و معادله هایپرابول شکل ذیل را بخود اختیار می نماید: $\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

سوالات

1. محیط مثلث مستاوی الاضلاع $104cm$ است، ارتفاع مثلث را دریافت نمایید:

1) $\frac{104}{3}\sqrt{3}\ cm$

2) $\frac{52}{6}\sqrt{12}\ cm$

3) $\frac{104}{6}\sqrt{3}\ cm$

4) $\frac{52}{3}\sqrt{12}\ cm$

2. اگر دو ضلع مثلث 10 واحد و 4 واحد و زاویه بین آن دو ضلع $45°$ باشد، مساحت مثلث را دریابید:

1) $10\sqrt{2}$

2) $18\sqrt{2}$

3) $20\sqrt{2}$

4) $15\sqrt{2}$

3. اگر اضلاع دو زاویه در فضا، دو به دو موازی و همجهت باشند، این دو زاویه باهم:

1) دو چند یکدیگر اند

2) مساوی اند

3) مختلف اند

4) نصف یکدیگر اند

4. دو دایره کیفی اگر یکدیگر را در دو نقطه قطع نمایند در این صورت آنها را دایره های:

1) متقاطع می نامند

2) مماسی می نامند

3) غیر مماسی می نامند

4) متداخل می نامند

5. معادله خط مستقیم که از نقاط $(7,-1)$ و $(5,4)$ می گذرد، عبارت است از:

1) $y+\frac{5}{2}x-\frac{22}{5}=0$

2) $y+\frac{5}{2}x-\frac{33}{2}=0$

3) $y-\frac{5}{2}x+\frac{33}{2}=0$

4) $y+\frac{5}{2}x+\frac{33}{2}=0$

6. معادله خط مستقیم که محور x را در نقطه $x = 3$ و محور y را در نقطه $y = 2$ قطع می نمایند، عبارت است از:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4} = 1$ 2) $\frac{x}{2}-\frac{y}{4} = 1$ 3) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 1$ 4) $\frac{x}{3}-\frac{y}{2} = 1$

7. فاصله نقطه $P(2,-2)$ از خط مستقیم $2x + 2y - 2 = 0$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ 4) $\sqrt{2}$

8. معادله دو خط مستقیم به ترتیب $x - 6y + 4 = 0$ و $-4x + 10y + 4 = 0$ است) این دو خط مستقیم با دارای کدام حالت زیر است:

1) متقاطع اند 2) موازی اند 3) متقاطع اند 4)هیچکدام

9. معادله خط مستقم که از نقطه $(-\sqrt{5},4)$ میگذرد و با محور y موازی باشد، عبارت است از:

1) $x = -4$ 2) $x = \sqrt{5}$ 3) $x = 4$ 4) $x = -\sqrt{5}$

10. معادله خط مستقیم که از نقطه $P(0,1)$ میگذرد و زاویه میل آن با محور x، $\theta = 30°$ میباشد عبارت از:

1) $\sqrt{3}y + x = \sqrt{3}$ 2) $y - \sqrt{3}x = \sqrt{3}$

3) $\sqrt{3}y - x = \sqrt{3}$ 4) $y + \sqrt{3}x = \sqrt{3}$

11. خطی که از نقاط $(-1,0)$ و $(4,-8)$ میگذرد نقطه تنصیف کمیات وضعیه آن عبارت است از:

1) $p(1,4)$ 2) $p\left(4,\frac{2}{3}\right)$ 3) $p\left(-4,\frac{2}{3}\right)$ 4) $p\left(\frac{3}{2},-4\right)$

12. معادله خط مستقیم که از نقطه $P_1(3, \sin\pi)$ عبور کرده و موازی با محور y باشد عبارت است از:

1) $x = 0$ 2) $x = 3$ 3) $x = \frac{1}{3}$ 4) $x = \frac{1}{6}$

13. فاصله خط مستقیم $4x - 3y - 45 = 0$ از مبدأ کمیات وضعیه مساوی میشود به:

1) 7 2) 8 3) 9 4) 3

14. میل معادله خط مستقیم $x - \frac{1}{5}y + 2 = 0$ عبارت است از:

1) $m = 5$ 2) $m = \frac{1}{5}$ 3) $m = -5$ 4) $m = -\frac{1}{5}$

15. معادله خط مستقیم که میل ان 2 و از نقطه $(0, -1)$ عبور مینماید، عبارت است از:

1) $y + 2x + 1 = 0$ 2) $y - 2x - 1 = 0$

3) $y - 2x + 1 = 0$ 4) $y + 2x - 1 = 0$

16. معادله خط مستقیم که از نقطه $\left[0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ گذشته و دارای میل $\frac{3}{\sqrt{2}}$ باشد عبارت است از:

1) $x + \sqrt{2}y = 1$ 2) $3x + \sqrt{2}y = 1$

3) $3x - \sqrt{2}y = 1$ 4) $x - \sqrt{2}y = 1$

17. میل خط مستقیم $y = 2x + xln\, 2 + 1$ عبارت است از:

1) $m = \ln 2\, e^2$ 2) $m = 2\ln 2\, e$ 3) $m = \ln 2$ 4) $m = 2$

18. میل خط مستقیم $y = 2x + \frac{1}{2}x + 1$ عبارت است از:

1) $\mathrm{m} = \frac{1}{2}$ 2) $m = \frac{5}{2}$ 3) $m = \frac{3}{2}$ 4) $m = 2$

19. فاصله بین نقاط $P_1(\ln 3\,, 2)$ و $P_2\left(-\ln\frac{1}{3}, 2\right)$ عبارت است از:

1) 2 2) صفر

3) $\ln^3 1$ 4) 2 و 3 درست است

20. در سیستم کمیات وضیعه قایم موقیعت نقطه $p\left(\log\frac{1}{4}, \log\frac{1}{5}\right)$عبارت از:

1) IV 2) II 3) I 4) III

21. فاصله بین نقاط $P_1(-3,-1)$ و $P_2(-4,4)$ مساوی است به:

1) $\sqrt{26}$ 2) $\sqrt[3]{2}$ 3) $\sqrt{24}$ 4) $\sqrt{27}$

22. فاصله بین دو خط موازی $x + 2y = 2$ و $100x + 200y = 10$ عبارت است از:

1) $\frac{19}{10\sqrt{5}}$ 2) $\frac{190}{\sqrt{5000}}$ 3) $\frac{191}{\sqrt{5000}}$ 4) $\frac{19}{10}$

23. معادله خط مستقیم $\sqrt{3x} + y - 4 = 0$ به شکل نورمال عبارت است از:

1) $x\cos 30° - y\sin 30° + 21 = 0$

2) $x\cos 30° + y\sin 30° - 21 = 0$

3) $x\cos 30° - y\sin 30° = 0$

4) $x\cos 30° + y\sin 30° = 0$

24. معادله خط مستقیم $-3x+y-9=0$ به شکل نورمال عبارت است از:

1) $\frac{-3x}{\sqrt{10}}+\frac{y}{\sqrt{10}}+\frac{24}{\sqrt{10}}=0$
2) $\frac{-3x}{\sqrt{10}}-\frac{y}{\sqrt{10}}-\frac{9}{\sqrt{10}}=0$
3) $\frac{-3x}{\sqrt{10}}-\frac{y}{\sqrt{10}}+\frac{24}{\sqrt{10}}=0$
4) $\frac{-3x}{\sqrt{10}}+\frac{y}{\sqrt{10}}-\frac{9}{\sqrt{10}}=0$

25. معادله خط مستقیم $x+2y+4=0$ به شکل نورمال عبارت است از:

1) $\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{2y}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$
2) $\frac{x}{\sqrt{25}}-\frac{2y}{\sqrt{25}}-\frac{4}{\sqrt{25}}=0$
3) $\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$
4) $-\frac{x}{\sqrt{5}}-\frac{2y}{\sqrt{5}}-\frac{4}{\sqrt{5}}=0$

26. طول مماس از نقطه $(10,4)$ به دایره $x^2+y^2-100=0$ مساوی است به:

1) 5
2) 8
3) 4
4) 10

27. طول مماس از نقطه $P(-2,-11)$ بر دایره $x^2-8+y^2+6y=-21$ عبارت است از:

1) $8\sqrt{6}$
2) $4\sqrt{6}$
3) $5\sqrt{2}$
4) $8\sqrt{2}$

28. اگر سه نقطه $A(-1,2)$, $B(3,0)$ و $C(4,b)$ روی یک خط قرار داشته باشد، قیمت b عبارت است از:

1) $\frac{1}{2}$
2) $-\frac{1}{2}$
3) 3
4) -2

29. معادله خط مستقیمی که از نقطه $(-1,1)$ عبور نموده با محور x زاویه $45°$ را تشکیل می نماید، عبارت است از:

1) $x-y+2=0$
2) $x-y=2$
3) $x+5y=-4$
4) $2x-y=3$

30. نقطه تقاطع مستقیم های $x = -4$ و $y = 5$ عبارت است از:

1) $(4,5)$ 2) $(4,-5)$ 3) $(5,-4)$ 4) $(-4,5)$

31. اگر زاویه میل یک خط مستقیم $100°$ باشد، پس میل آن عبارت است از:

1) مثبت است 2) منفی است 3) صفر 4) هیچکدام

32. کمیات وضعیه نقطه p که خط مستقیم $\overline{p_1p_2}$ را که از نقاط $A(5,6)$ و $B(-2,-3)$ گذشته داخلاً به نسبت $\frac{3}{5}$ تقسیم می نماید:

1) $\left(\frac{11}{4},\frac{15}{4}\right)$ 2) $\left(\frac{21}{8},\frac{19}{8}\right)$ 3) $\left(\frac{19}{8},\frac{21}{8}\right)$ 4) $\left(\frac{15}{4},\frac{11}{4}\right)$

33. فاصله نقطه $(\log_3 27 , 4\cos 100\pi)$ از مبدأ کمیات وضعیه مساوی است به:

1) 4 2) 5 3) $\sqrt{6}$ 4) 6

34. اگر رأس های مثلث ABC به ترتیب $A(1,1)$, $B(1,2)$ و $C(2,1)$ باشند، مساحت این مثلث عبارت است از:

1) 3 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) $\frac{1}{3}$

35. هرگاه $A(0,5)$, $B(5,0)$, $C(0,-5)$ و $D(-5,0)$ رأس های یک چهار ضلعی باشند، درین صورت نوعیت چهار ضلعی عبارت است از:

1) مربع 2) ذوذنقه 3) لوزی 4) مستطیل

36. کمیات وضعیه نقطه P که خط مستقیم $\overline{P_1P_2}$ را که از نقاط $P_1(4,5)$ و $P_2(-2,-3)$ گذشته و خارجاً به نسبت $\frac{3}{5}$ تقسیم می نماید عبارت است از:

1) $P\left(\frac{21}{3},\frac{31}{3}\right)$ 2) $P\left(\frac{21}{2},\frac{91}{2}\right)$ 3) $P\left(\frac{31}{3},\frac{21}{3}\right)$ 4) $P\left(\frac{39}{2},\frac{31}{2}\right)$

37. کدام یک از مستقیم های ذیل با محور x زاویه $60°$ را می سازد:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x = 1$ 2) $y = -x + 1$

3) $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ 4) $\sqrt{3}y + x + 1 = 0$

38. معادله دایره که مرکز آن $(0,-5)$ و شعاع آن 9 واحد باشد عبارت است از:

1) $x^2 + y^2 + 10y + 56 = 0$ 2) $x^2 + y^2 = 81$

3) $x^2 + y^2 = 56$ 4) $x^2 + y^2 + 10y - 56 = 0$

39. اگر $x^2+y^2-4x-18y-20=0$ معادله دایره است، طول شعاع این دایره مساویست به:

1) $\sqrt{102}$ 2) $\sqrt{193}$ 3) $\sqrt{104}$ 4) $\sqrt{105}$

40. اگر معادله دایره به شکل $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-2x-2y=0$ باشد، پس مختصات مرکز دایره عبارت است از:

1) $(2,2)$ 2) $(-2,2)$ 3) $(2,-2)$ 4) $(-2,-2)$

41. اگر $C(1,0)$ مرکز دایره $(4,5)$ یک نقطه محیط دایره باشد، طول شعاع دایره مساوی است به:

1) $\sqrt{43}$ 2) $\sqrt{41}$ 3) $\sqrt{34}$ 4) $\sqrt{42}$

42. هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی طوری قطع شود، که مستوی به محور اصلی مخروط موازی و عمود نباشد شکل حصله عبارت است از:

1) دایره 2) بیضوی 3) پارابولا 4) هایپرابول

43. اگر کمیات وضیعه محراق یک پارابولا $F\left(0,\frac{0)02}{0)05}\right)$ باشد،پس معادله پارابولا عبارت از:

1) $y^2=\frac{0)800}{0)500}$ 2) $x^2=\frac{0)800}{0)500}$

3) $x^2=\frac{0)800}{0)500}y$ 4) $y^2=-\frac{0)800}{0)500}x$

.44 کمیات وضیعه راس پارابول $[(\log 0)001)x-(9)^2=9[100y-\sin(8\pi)]$ عبارت از:

1) $(-9,\sin 8\pi)$ 2) $(-3,0)$ 3) $(9,\sin 8\pi)$ 4) $(3,0)$

.45 رأس پارابول $y=bx^2+a$ عبارت است از:

1) $\left(-\frac{a}{2b},-\frac{a^2}{4a}\right)$ 2) $(0,a)$ 3) $\left(0,\frac{b^2}{4a}\right)$ 4) $\left(0,\frac{a^2}{4a}\right)$

.46 دهن پارابولای $x^2=y\cdot\log 0)05$ به کدام طرف باز میگردد:

1) پایین 2) چپ 3) راست 4) بالا

.47 دهن پارابولا $x^2=y\cos 5\pi$ به کدام طرف باز میگردد:

1) چپ 2) بالا 3) راست 4) پایین

.48 معادله محور تناظر پارابولا $y^2-18y-x+73=0$ عبارت است از:

1) $y=9$ 2) $y=-9$ 3) $x=9$ 4) $x=-9$

.49 معادله خط موجه پارابولای $(x-44)^2=14(y-44)$ مساوی است به:

1) $y=-40)5$ 2) $y=-40)6$ 3) $y=40)5$ 4) $y=40)6$

.50 اگر در یک پارابولا معادله هادی آن $x=-0)001$ باشد، پس معادله پارابولا عبارت است از:

1) $x^2=-\frac{1}{250}y$ 2) $y^2=\frac{1}{250}x$

3) $x^2=\frac{1}{250}y$ 4) $y^2=-\frac{1}{250}x$

.51 کمیات وضیعه محراق یک پارابولا $F(0)75,0)$ باشد، معادله پارابولا عبارت است از:

$y^2 = 3x$ (1 $x^2 = 3$ (2 $y^2 = -3x$ (3 $x^2 = -3y$(4

.52 اگر کمیات وضعیه محراق یک پارابولا $F(0,001,0)$ باشد معادله آن عبارت است از:

$x^2 = \frac{1}{25}y$ (1 $x^2 = \frac{1}{250}$ (2

$y^2 = \frac{1}{250}$ (3 $y^2 = \frac{1}{250}x$ (4

.53 انجام های وتر عمودی پارابولا در صورتیکه $x = 2$ و معادله آن به شکل $y^2 = 8x$ باشد، عبارت است از:

$M(-4,2), M'(4,2)$ (1 $M(-2,4), M'(-2,-4)$ (2

$M(-2,4), M'(-2,0)$ (3 $M(2,4), M'(2,-4)$ (4

.54 اگر مختصات انجام های قطر اصغر یک بیضوی $(9,0)$, $(-9,0)$و عن المرکزیت آن $\frac{\sqrt{88}}{13}$ باشد،پس معادله آن:

$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{169} = 1$(1 $\frac{x^2}{88} + \frac{y^2}{169} = 1$ (2

$\frac{x^2}{88} + \frac{y^2}{169} = 1$(3 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{81} = 1$(4

.55 در معادله $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ عن المرکزیت بیضوی مساوی است به:

1) $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $e = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 3) $e = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 4) $e = \frac{\sqrt{3}}{4}$

.56 اگر معادله بیضوی به شکل $1 = \frac{(y+\sin\frac{\pi}{3})^2}{900} + \frac{(x+\sin\frac{\pi}{4})^2}{800}$ باشد،پس عن المرکزیت آن مساوی

است به:

1) $e = \frac{1}{4}$ 2) $e = \frac{1}{2}$ 3) $e = \frac{1}{3}$ 4) $e = \frac{1}{5}$

.57 در معادله بیضوی $0)0168(x+3)^2 + 0)0165(y-2)^2$ خاصیت قطر بزرگ عبارت از:

1)موازی با محور x است 2) بالای محور y است

3) موازی با محور y است 4) بالای محور xاست

.58 معادله بیضوی $1 = \frac{y^2}{0)25} + \frac{x^2}{0)49}$ باشد قطر اصغر آن دارای کدام خاصیت ذیل میباشد:

1) روی محور x قرار دارد 2) روی محور y قرار دارد

3) موازی به محور y است 4) موازی به محور x است

.59 هرگاه محراق های بیضوی روی محور x و مرکز آن در مبدأ کیمات وضعیه بوده و $a > b$ باشد،

درینصورت معادله آن عبارت است از:

1) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

3) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

.60 عن المرکزیت الپس که معادله آن به صورت $16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$ باشد، مساوی است به:

1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

.61 محور محراقی هایپربولای $1 = 05x^2$ (2 − $3y^2$) 0) خاصیت زیر را دارد:

1) روی محور x است 2) روی محور y است

3) موازی با محور x است 4) موازی با محور y است

.62 اگر معادله هایپربولا به صورت $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ باشد، مختصات رأس نمونه هایپربولا عبارت از:

1) $V_1(0,2), V_2(0,-2)$ 2) $V_1(4,0), V_2(-4,0)$

3) $V_1(0,4), V_2(0,-4)$ 4) $V_1(2,0), V_2(-2,0)$

.63 اگر معادله هایپربولا به صورت $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$ باشد، معادلات خطوط هادی آن عبارت از:

1) $y=\frac{4}{\sqrt{13}}, y-\frac{4}{\sqrt{13}}$ 2) $y=\frac{\sqrt{13}}{2}, y-\frac{\sqrt{13}}{2}$

3) $y=\frac{\sqrt{15}}{4}, y-\frac{\sqrt{15}}{4}$ 4) $y=\frac{2}{\sqrt{13}}, y-\frac{2}{\sqrt{13}}$

64. معادلات خطوط هادی هایپربولا که محراق هایش روی محور y و مرکز آن مبدأ کمیات وضعیه قرار داشته باشد عبارت است از:

1) $y=\frac{a}{e}, y=-\frac{a}{e}$ 2) $y=\frac{e}{a}, y=-\frac{e}{a}$

3) $y=\frac{a}{b}, y=-\frac{a}{b}$ 4) $y=\frac{b}{a}, y=-\frac{b}{a}$

65. مستقیم $x=0$ دایره $x^2+y^2=16$ را در چند نقطه قطع میکند:

1) سه نقطه 2) یک نقطه 3) قطع نمیکند 4) دو نقطه

66. از نقطه $(1,2)$ به دایره $(x-1)^2+(y-2)^2-4=0$ چند مماس رسم شده میتواند:

1) 1 2) 2

3) 3 4) مماس رسم شده نمیتواند

67. نقطه تقاطع دایره $x^2+y^2=9$ با خط مستقیم $y=-3$ عبارت است از:

1) $(3,0)$ 2) $(0,-3)$ 3) $(-3,0)$ 4) $(0,3)$

68. $C>0, A>0$, باشد، مربوط کدام یک از منحنی های ذیل است:

1) پارابول 2) هایپربولا

3) دایره 4) بیضوی

فصل نهم

لیمت توابع

لیمت که به معنی حد یا هدف است یکی از مباحث عمده ریاضیات میباشد که توسط عالم انگلیسی به نام «ویرس ترس» بطور مفصل تشریح و توضیح گردیده است.

تقرب متحول: هرگاه متحول x به عدد معین a تقرب نماید ، طوریکه تفاوت بین x و a از هر عدد کوچک $(\delta > 0)$ کوچکتر گردد، یعنی :

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow x \to a$$

تقرب متحول از دست راست: اگر یک ترادف متناقص قیمت های x وجود داشته باشد.

$$x : a+0.1, a+0.01, a+0.001, \cdots \left(x \to a^{+}\right)$$

تقـــرب متحـــول از دســـت چـــپ: اگــر یــک تــرادف متزایــد قیمــت هــای x وجــود داشــته باشد.

$$x : a-0.1, a-0.01, a-0.001, \cdots \left(x \to a^-\right)$$

تعریـــــــف : هرگـــاه در تـــابع $y = f(x)$ متحـــول $\left(x \to a^+, x \to a^-\right)$ یعنـــی $x \to a$ نمایـــد ، طوریکـــه $|x-a| < \delta$ گـــردد ، در ایـــن صـــورت تـــابع مربـــوط $y \to l$ مـــی نمایـــد ، طوریکـــه $|y-l| < \varepsilon$ میگـــردد ، (در حالیکـــه δ و ε دو عـــدد بـــی نهایـــت کوچـــک انتخـــابی مثبت می باشد) پس می توان نوشت:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = l$$

خواص لیمت:

1) $\lim\limits_{x \to a} c = c(c = const)$

2) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x) \cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

4) $\lim\limits_{x \to a}\left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

5) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

6) $\lim\limits_{x \to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n$

7) $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

8) $\lim\limits_{x \to a}\left[\log_b f(x)\right] = \log_b\left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]$

توابـــع بـــی نهایـــت کوچـــک: تـــابع $\varepsilon(x)$ در صـــورتیکه $x \to a$ بـــی نهایـــت کوچـــک گفته می شود ، اگر $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ گردد.

قضـــیه ســـاندویچ: اگـــر توابـــع ماننـــد $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ را در نظـــر بگیـــریم بـــرای قیمـــت هـــای x از یـــک انتـــروال بـــاز کـــه عـــدد a شـــامل آن باشـــد ، طوریکـــه $x = a$ و یـــا امکـــان دارد

هرگاه $f(x) \le g(x) \le h(x)$ را صدق نماید، هرگاه $x \neq a$ باشد، شرطی $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = b$ باشد، پس $\lim_{x\to a} g(x) = b$ می باشد.

مثلاً اگر تابع $g(x)$ دارای خاصیت $\left(2 - \frac{x}{5} \le g(x) \le 2 + \frac{x}{5}\right)$ باشد، $\lim_{x\to 0} g(x)$ را مشخص می نماییم.

چون:

$$\lim_{x\to 0}\left(2 - \frac{x}{5}\right) = \lim_{x\to 0}\left(2 + \frac{x}{5}\right) = 2$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} g(x) = 2$$

اشکال نامعین: اشکال نامعین عبارت اند از:
$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty^{\infty}, \infty^{0}, 0^{\infty}, 0^{0}$ که هر یک از اشکال به کمک لیمت به روش و طریقه های خاصی دارای قیمت حدی می گردد.

رفع اشکال نامعین:

1. **رفع شکل $\frac{0}{0}$:** برای دریافت لیمت تابع که در شکل $\frac{0}{0}$ باشد آنرا به وسیله تجزیه پولینوم های الجبری، تقسیم ترکیبی، ضرب مزدوج و یا تعویض ساده می نماییم.
2. **رفع شکل $\frac{\infty}{\infty}$:** جهت دریافت لیمت $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0}$ زمانیکه $x \to \infty$ نماید، سه نتیجه ذیل وجود دارد.

- ❖ هرگاه $n = m$ باشد لیمت تابع $\left(\frac{a_n}{b_m}\right)$ است.
- ❖ هرگاه $n < m$ باشد لیمت تابع (0) است.
- ❖ هرگاه $n > m$ باشد لیمت تابع (∞) است.

3. **رفـــع شـــکل** $(\infty-\infty)$ و $(0\cdot\infty)$**:** اولاً توابـــع اشـــکال فـــوق را بـــه کمـــک مخـــرج مشـــترک یـــا ضـــرب مـــزدوج و یـــا ســـایر عملیـــات ریاضـــی بـــه شـــکل $\frac{0}{0}$ و یـــا $\frac{\infty}{\infty}$ تبـــدیل نمـــوده ، بعداً مانند حالت اول و دوم به حل آن می پردازیم.

4. **رفـــع شـــکل** 1^{∞}**:** جهـــت دریافـــت لیمـــت تـــابع کـــه در شـــکل 1^{∞} قـــرار داشـــته باشـــد بـــا استفاده از روابط ذیل می توان عمل نمود.

$$1)\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad\qquad 2)\qquad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

طوریکـــه $e=2.718281\cdots$ بنـــام عـــدد ایلـــر *Euler* یـــاد مـــی گـــردد ، همچنـــان نتـــایج دو قضـــیه فوق عبارت از:

$$1)\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\cdot\beta} \qquad\qquad 2)\qquad \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{\alpha}{x}}=e^{\alpha}$$

و به همین ترتیب شکل عمومی مبهم 1^{∞} را اختیار نماید ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[v(u-1)\right]}$$

لیمـــت توابـــع مثلثـــاتی : جهـــت دریافـــت لیمـــت هـــای توابـــع مثلثـــاتی ســـه قضـــیه اساســـی ذیـــل را در نظر داشته باشید.

$$1)\qquad \lim_{x\to 0}\sin x=0$$

$$2)\qquad \lim_{x\to 0}\cos x=1$$

$$3)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

نتائج قضیه (3) عبارت است از:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$$
$$b)\quad \lim_{x\to 0}(x\cdot\csc x)=1$$
$$c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$
$$d)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$$
$$e)\quad \lim_{x\to 0}(x\cdot\cot x)=1$$

بخاطر داشته باشید که $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ می گردد.

متمادیـــــت توابـــــع: از دیـــدگاه لیمـــت توابـــع یـــک تـــابع $y=f(x)$ در نقطـــه $x=a$ متمـــادی گفته می شود زمانیکه:

1. نقطه a در ناحیه تعریف $f(x)$ شامل باشد ، یعنی $f(a)$ موجود باشد.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود باشد.
3. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ گردد.

یادداشـــت: بـــه خـــاطر داشـــته باشـــید کـــه در محاســـبه لیمـــت توابـــع نـــاطق (کســـری) هرگـــاه تـــابع شـــکل مـــبهم $\frac{0}{0}$ یـــا $\frac{\infty}{\infty}$ را داشـــته باشـــد ، اســـتعمال قاعـــده هوپیتـــال یعنـــی $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ (بـــه کمک مشتق صورت و مخرج کسر) خیلی مفید است.

قابـــل یـــاد آوری اســـت کـــه اگـــر بعـــد از مشـــتق اول بـــاز هـــم تـــابع در شـــکل نـــامعین قـــرار گیـــرد ، مشـــتق دوم ، سوم ، ... (n) – ام آنرا تشکیل نموده تا رفع ابهام گردد.

سوالات

1. $\lim\limits_{x\to\sqrt{e}}\left(\frac{1}{x}\right)^{-2\ln x}$ مساوی است به:

1) $e^{\frac{1}{2}}$ 2) $e^{-\frac{1}{2}}$ 3) $\frac{1}{e}$ 4) e

2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{e^2}}(1+\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$ مساوی است به:

1) 2 2) $\sqrt{-1}$ 3) e 4) $\frac{1}{i}$

3. اگر $f(x)$ در نقطه $x=2$ متمادی و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$ ، $f(2)=a-5$ باشد، پس قیمت a مساوی است به:

1) $a=2$ 2) $a=9$ 3) $a=3$ 4) $a=-1$

4. هرگاه برای هر $x\in(a-\delta,a+\delta)$, $f(x)\le g(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود باشند پس:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) > \lim\limits_{x\to a} g(x)$ 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3) هر دو صحت دارد 4) هر دو غلط است

5. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{\sin(x-\pi)}{\pi-x}\right)^{\frac{\pi-x}{\sin(x-\pi)}}$ مساوی است به:

1) -1 2) 1 3) 0 4) 2

.6 رابطه بین δ و ε در لیمت $\lim_{x\to 100}(3x+100)=400$ مساوی است به:

1) $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$ 2) $\delta=3+\varepsilon$ 3) $\delta=\frac{3}{\varepsilon}$ 4) $\delta=3\varepsilon$

.7 اگر $\varepsilon(x)=e^{\sin x}$ باشد در لیمیت $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)$ تابع $\varepsilon(x)$ به کدام قیمت a یک تابع بی نهایت کوچک است:

1) برای a هیچ عدد حقیقی موجود نیست 2) $a=\frac{10\pi}{4}$

3) $a=\frac{\pi}{100}$ 4) $a=\pi$

.8 $\lim_{x\to 4}\frac{\log^4(36-8x)^4}{\log^3(36-8x)^3}$ مساوی است به:

1) $\frac{256}{81}\log 4$ 2) $\frac{128}{27}\log 16$

3) $\frac{256}{27}\log 2$ 4) $\frac{64}{27}\log 4$

.9 اگر $\varepsilon(x)$ در $x\to a$ یک تابع بی نهایت کوچک و $\lim_{x\to a} g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد پس تابع $\varepsilon(x)$ مساوی است به:

1) $\varepsilon(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+g(x)$ 2) $\varepsilon(x)=0$

3) $\varepsilon(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-g(x)$ 4) $\varepsilon(x)=\lim_{x\to a} g(x)-\frac{5}{8}$

.10 $\lim_{x\to 0.01}\frac{1-\cos^2\frac{1}{200}}{1-\cos x}$ مساوی است به:

1) $\sin(0.01)-1$ 2) $\frac{1}{100}$

3) $\sin^2(0.01)-1$ 4) هیچکدام

11. اگر $x \to d, g(x)$ یک تابع بی نهایت کوچک $\lim_{x\to 4} k(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}$ باشد، پس تابع مساوی است به:

1) $K(x) = \frac{6+\sqrt{8}g(x)}{\sqrt{8}}$ 2) $k(x) = \frac{3\sqrt{2}}{2}g(x)$

3) $k(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{g(x)}$ 4) $k(x) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{g(x)}$

12. اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1 \\ x+2, x = 1 \end{cases}$ باشد،پس $\lim_{x\to 1} f(x)$ مساوی است به:

1) 2 2) 1 3) -1 4) 2

13. اگر $\lim_{x\to 6} f(x) \neq f(6)$ باشد،پس $f(x)$ در نقطه $x = 6$ دارای یکی از خاصیت های زیر است:

1) مشتق پذیر است 2) متمادی نیست 3) انتیگرال پذیر است 4) متمادی است

14. $\lim_{x\to \ln\frac{1}{2}} \frac{\ln 2+\ln 2\cos x}{cos^2 \ln\frac{1}{\sqrt{2}}}$ مساوی است به:

1) $cos^2 \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\ln 4$ 3) $\ln 2 + \ln 2\cos x$ 4) 2

15. $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{ln^2(x+1)}{ln^2(x-1)}$ مساوی است به:

1) 9 2) $9\ln\frac{2}{3}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{9}{\ln 2}$

16. اگر $g(x) = \begin{cases} \sin x + x \quad : x \geq 0 \\ x^2 - 1 \quad : -1 < x < 0 \\ x^3 + \sqrt{x^2+1} : -3 < x \leq -1 \end{cases}$ باشد،پس $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ مساوی است به:

1) 0 2) -1 3) 1 4) 2

.17 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{10}}(\cos 10x)(1+tan^2 10x)$ مساوی است به:

1) $tan^2 1$ 2) $sec^2 1$ 3) $\tan 1$ 4) $\sec 1$

.18 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+7x+12}{(x-1)^2+1}$ مساوی است به:

1) 8 2) 5 3) 6 4) 7

.19 اگر $\varepsilon(x)$ در $x\to a$ یک تابع بی نهایت کوچک و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ پس تابع $\varepsilon(x)$ مساوی است به:

1) $\varepsilon(x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+g(x)$ 2) $\varepsilon(x)=0$

3) $\varepsilon(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-g(x)$ 4) $\varepsilon(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)-\frac{5}{8}$

.20 $\lim\limits_{x\to 10}\frac{\log^4(29-2x)^2}{\log^3(29-2x)}$ مساوی است به:

1) $17\log 9$ 2) $81\log 9$ 3) $27\log 3$ 4) $81\log 3$

.21 اگر $\varepsilon(x)$ $x\to a,$ یک تابع بینهایت کوچک و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\frac{8}{7}$ باشد، پس تابع $f(x)$ مساوی است به:

1) $f(x)=\varepsilon(x)-\frac{8}{7}$ 2) $f(x)=\frac{16}{14}-\frac{1}{\varepsilon(x)}$

3) $f(x)=\frac{8+7\varepsilon(x)}{7}$ 4) $f(x)=\frac{8}{7}\varepsilon(x)$

.22 لیمت $\lim\limits_{x\to 5^+} 3^{\frac{3}{x-5}}$ عبارت است از:

1) ∞ 2) 0 3) e^3 4) $-\infty$

.23 لیمت $\lim\limits_{x\to\sin 1}\frac{1-x^2}{1+\cos 2}$ مساوی است به:

$\frac{1}{2}$ (1 $\qquad$ $\sin 1+1$ (2 $\qquad$ $2\sin 1$ (3 $\qquad$ 2 (4

.24 در $\lim\limits_{x\to 1}(5x-1)=4$ رابطه بین δ و ε مساوی است به:

$\delta=\varepsilon$ (1 $\qquad$ $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ (2 $\qquad$ $\delta=2\varepsilon$ (3 $\qquad$ $\delta=\frac{5}{\varepsilon}$ (4

.25 $\lim\limits_{x\to\log 5}(10^x+\frac{1}{10^x})$ مساوی است به:

$\frac{5}{26}$ (1 $\qquad$ 5 (2 $\qquad$ $\frac{26}{5}$ (3 $\qquad$ $\frac{1}{5}$ (4

.26 تابع $g(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & ; x>0\\ x^2+1 & ; -2<x\leq 0\\ 4x-1 & ; -5<x\leq -2\end{cases}$ باشد، پس کدام رابطه ذیل درست است:

$\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)\geq g(-2)$ (1 $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)=g(-2)$ (2

3) هیچکدام $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)<g(-2)$ (4

.27 اگر $f(x)$ در نقطه $x=a$ متمادی $f(a)=-1$ باشد، پس $\lim\limits_{x\to a}5^{f(x)}$ مساوی است به:

5^{-1} (1 $\qquad$ 25 (2 $\qquad$ -5 (3 $\qquad$ 5 (4

.28 اگر $f(a)=3$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=2y+1$ باشد $f(x)$ در نقطه $x=a$ متمادی باشد، پس قیمت y مساوی است به:

2 (1 $\qquad$ 1 (2 $\qquad$ -2 (3 $\qquad$ -1 (4

.29 لیمت $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin3x\ .\ sin5x}{(x-x^3)^2}$ مساوی اس به :

1) 50 2) $\sqrt{15}$ 3) $\frac{1815}{121}$ 4) 0

.30 $\lim\limits_{x\to0}\frac{tan^2\frac{x}{3}}{sin^3\frac{3x}{5}}$ مساوی است به:

1) $\frac{25}{81}$ 2) 1 3) $\frac{81}{25}$ 4) 0

.31 اگر $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{5}$ باشد مجانب مایل $f(x)$ مساوی است به:

1) مجانب مایل ندارد 2) $y=-\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 3) $y=x+\frac{1}{5}$ 4) $y=x-\frac{1}{5}$

.32 $\lim\limits_{x\to\infty}(x^5-8x^3)$ مساوی است به:

1) 0 2) 1 3) ∞ 4) -1

.33 لیمت $\lim\limits_{x\to3}\frac{\tan x-\sin x}{12\tan x}$ مساوی است به:

1) $\frac{\sin^2 3}{6}$ 2) $\frac{\sin^2\frac{3}{2}}{6}$ 3) $\frac{\sin^2 2}{3}$ 4) $\frac{\sin^2 2}{6}$

.34 لیمیت $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin 2x}{\sin x}$ مساوی است به:

1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) 3

.35 $\lim\limits_{x\to0.01}\frac{1-\cos^2\frac{1}{200}}{1-\cos x}$ مساوی است به:

1) $\sin(0.01)-1$ 2) $\frac{1}{100}$

3) $\sin^2(0.01)-1$ 4) هیچکدام

36. لیمت $\lim_{x\to ln\frac{1}{2}} \frac{\ln 2+\ln 2\cos x}{\cos^2 \ln\frac{1}{\sqrt{2}}}$ مساوی است به:

1) $\cos^2 \ln\frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\ln^2+\ln 2\cos x$ 3) $\ln 4$ 4) 2

37. اگر $f(x)=\sin x+x$ باشد پس $\lim_{x\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}$ مساوی است به:

1) -1 2) 0 3) موجود نیست 4) 1

38. $\lim_{x\to 2}\frac{|x-2|}{x-2}$ مساوی است به:

1) 1 2) 0 3) موجود نیست 4) -1

39. اگر $g(x)=\frac{e^x-1}{2x^2}$ باشد،پس حاصل $\lim_{x\to 0} g(x)$ یکی از گزینه های ذیل است:

1) 6 2) ∞ 3) $-\infty$ 4) موجود نیست

40. لیمت $\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\frac{\pi^{-\frac{2}{4}}\quad -x}{\pi^{-1}\quad -x^2}$ مساوی است به:

1) $2\sqrt{\pi}$ 2) $\frac{2}{\pi}$ 3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{4\pi}}{4}$

41. لیمت $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{3\ln(x+\Delta x)}-e^{3\ln x}}{\Delta x}$ مساوی است به:

1) $3e^{\ln x^2}$ 2) $e\ln x^2$ 3) $e^{\ln x}$ 4) $3e\ln x^2$

42. $\lim_{x\to\ln 10}\frac{x^2-\ln^2 10}{x-\ln 10}$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{2}\ln 10000$ 2) $\frac{1}{2}\ln 10$ 3) $\ln 10$ 4) $\ln 1000$

.43 $\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{2}x+\sqrt{2}h)^3-(\sqrt{2}x)^3}{h}$ مساوی است به:

1) $3-\sqrt{2}x$ 2) $6-\sqrt{2}(2x)^2$

3) $3\sqrt{2}(2x)^2$ 4) $3\sqrt{8}x^2$

.44 $k\neq \ln 3$, $\lim_{x\to \ln 3}\frac{k^2-\ln^2 3}{k-\ln 3}$ مساوی است به:

1) $k+\ln 3$ 2) $2nl\ 3$ 3) صفر 4) $\ln 3$

.45 $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt{x}-\sqrt{8}}$ مساوی است به:

1) $\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{2}$ 3) $3\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$

.46 $\lim_{x\to 0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$ مساوی است به:

1) 16 2) 32 3) 36 4) 40

.47 $\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1}$ مساوی است به:

1) موجود نیست 2) صفر 3) -1 4) 1

.48 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}+2x^{25}}{x^{25}+1}$ مساوی است به:

1) ∞ 2) 2^{25} 3) 0 4) 1

.49 لیمت $\lim_{x\to\infty}\frac{(9x^4+1)^{30}+(5x^4+2)^{20}}{(3x^2+3)^{30}+(3x^4+4)^{20}}$ عبارت است از:

1) 9^0 2) ∞ 3) 9^9 4) 3^{30}

.50 لیمت $\lim_{x\to\infty}\frac{8x^{100}+(x^2-1)^{100}+x^{50}}{x^{100}+9x^{100}+1}$ مساوی است به:

1) ∞ 2) $\frac{8}{9}$ 3) 1 4) 0

.51 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{50}+2x^{25}}{x^{25}+1}$ مساوی است به:

1) ∞ 2) 2^{25} 3) 0 4) 1

.52 قیمت لیمت $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$ عبارت از:

1) $\frac{5}{17}$ 2) $\frac{15}{17}$ 3) صفر 4) بی نهایت

.53 مقدار لیمت $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{7n+\sqrt{5}}}{\sqrt{343n+\sqrt{2}}}$ عبارت از:

1) $-\frac{1}{4}$ 2) $-\frac{1}{7}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{7}$

.54 قیمت $\lim_{n\to\infty}\sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right]$ مساوی است به:

1) 1 2) 2 3) 0 4) ∞

.55 لیمت تابع $\lim_{x\to\infty}\frac{4^{x+2}+6^{x+1}}{5\cdot 6^x+2^x}$ عبارت از:

1) $\frac{3}{4}$ 2) 1 3) $\frac{6}{5}$ 4) $\frac{1}{2}$

.56 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2}x}$ مساوی است به:

1) $\sqrt{e}$ 2) $e^{\sqrt{2}}$ 3) $e^{-\sqrt{2}}$ 4) $-\sqrt{2}$

.57 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$ مساوی است به:

1) e^5 2) e^4 3) e^2 4) $e^{\frac{1}{2}}$

.58 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ مساوی است به:

1) e 2) 1 3) 0 4) $e^{\frac{1}{2}}$

.59 لیمت $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$ مساوی است به :

1) $-e$ 2) 1 3) -1 4) e

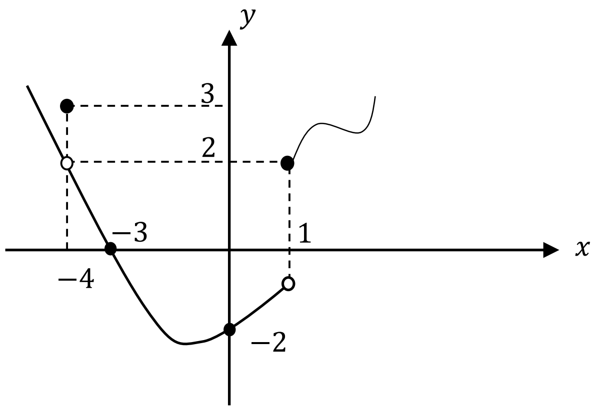
.60 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\frac{\sin x}{x}}$ مساوی است به:

1) موجود نیست 2) 1 3) e 4) ∞

.61 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[x]{1+\frac{1}{4x}}\right)$ مساوی است به:

1) $\sqrt[4]{e}$ 2) $\sqrt{e}$ 3) 1 4) $\frac{1}{e^{10}}$

.62 در شکل ذیل $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+\lim\limits_{x\to -3} f(x)+\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ عبارت است از:



1) 1 2) 3 3) 4 4) 5

.63 هرگاه $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+x-5]=4$ باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ عبارت از:

1) 3   2) 5   3) 6   4) 7

.64 هرگاه $x_n=\sqrt[n]{5}$ و $y_n=2+\frac{1}{n}$ باشد $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)$ عبارت از:

1) 2   2) -1 3) n 4) 0

.65 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$ باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(f(x)-3)(f^2(x)-4f(x)+1)}{x+3}$ عبارت از:

1) 0   2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

.66 لیمت $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(a-3)x^3-4x^2+x-5}{(b-2)x^2+3}=4$ در این صورت قیمت $a+b$ عبارت از:

1) 2   2) 3   3) 5   4) 4

.67 لیمت $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x^{\cos x}$ عبارت از:

1) 0   2) 1   3) $\frac{3}{2}$ 4) 2

.68 لیمت $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln\sqrt{e^3x^2+2}-\ln\sqrt{e^4x^2}\right]$ عبارت از:

1) -1 2) 1   3) $-\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{2}$

.69 هرگاه $f(x)=\left[1+\frac{4x^2}{3x^3+1}\right]^x$ باشد در این صورت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ عبارت از:

1) $\sqrt{e}$ 2) $\sqrt[3]{e^4}$ 3) $\sqrt[3]{e}$ 4) 1

.70 لیمت $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{1-2x}$ عبارت از:

1) e^{-2} 2) e^{-1} 3) e 4) e^2

فصل دهم

مشتقات

یکـــی از مباحـــث اساســـی علـــم ریاضـــیات مشـــتق بـــوده کـــه ســـهولت بیشـــتر را در علـــوم ســـاینس بوجـــود آورده اســـت ، مشـــتق توســـط «اســـحاک نیـــوتن» عـــالم انگلیســـی بوجـــود آمـــده کـــه بعـــداً عـــالم جرمنـــی «ویلم لبنز» آنرا بطور مفصل توضیح و تشریح نمود.

افـــزایش تـــابع: در تـــابع $y = f(x)$ اگـــر متحـــول x بـــه انـــدازه Δx افـــزایش نمایـــد، واضـــیح است که تابع مربوط نیز به اندازه Δy افزایش خواهد کرد. یعنی:

$$
\begin{aligned}
&y = f(x) \\
&y + \Delta y = f(x + \Delta x) - y \\
&\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)
\end{aligned}
$$

رابطـــه اخیـــر افـــزایش یـــک تـــابع را نشـــان میدهـــد در صـــورتیکه متحـــول مربـــوط افـــزایش نمـــوده باشـــد. حـــالا بـــه تحلیـــل افـــزایش تـــابع ، میتـــوان مشـــتق یـــک تـــابع را از نگـــاه هندســـی و تحلیـــل الجبـــری چنـــین تعریف نمود.

تعریف:

بــه تعبیــر هندســی ، مشــتق عبــارت از میــل ممــاس در یــک نقطــه معــین از منحنــی اســت. بــه تحلیــل الجبری هرگاه $y = f(x)$ یک تابع را ارائه نماید ، پس مشتق آن عبارت از:

$$y` = f`(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

قوانین مشتق:

در صــــورتیکه n, c, a اعــــداد ثابــــت ، x متحــــول و $\cdots, w = h(x), v = g(x), u = f(x)$ توابع را ارائه نمایند ، پس داریم که:

1) $y = c \Rightarrow y' = 0$

2) $y = ax^n \Rightarrow y' = anx^{n-1}$

3) $y = u \pm v \pm w \pm \cdots \Rightarrow y' = u' \pm v' \pm w' \pm \cdots$

4) $y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$

5) $y = c \cdot u \Rightarrow y` = c \cdot u`$

6) $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

7) $y = \frac{c}{v} \Rightarrow y' = -\frac{cv'}{v^2}$

8) $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

9) $y = au^n \Rightarrow y' = anu^{n-1}.u'$

که این نوع مشتق را بنام مشتق توابع مرکب یاد می کنند ، که میتوان چنین ارائه نمود.

$$u = g(x) \Rightarrow y = f(u) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y`_x = f`(u) \cdot u`(x)$$

10) $y = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y' = \frac{m \cdot u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

مشـــتقات ضـــمنی: هرگـــاه در بعضـــی از روابـــط x بـــا y یکجـــا باشـــند ، مشـــتق ضـــمنی آن چنـــین دریافت میگردد.

$$y`_{(x)}=-\frac{-f`(x)}{f`(y)}$$

مثلاً: مشتق ضمنی رابطه $5x^2y+3x^3-y^2+3=0$ را دریابید؟

$$y`_{(x)}=-\frac{f`(x)}{f`(y)}=-\frac{(10xy+9x^2-0+0)}{5x^2+0-2y+0}$$

$$y`_{(x)}=\frac{-10xy-9x^2}{5x^2-2y}$$

مشـــتقات توابـــع مثلثـــاتی: در حالیکـــه x متحـــول و $u=f(x)$ یـــک تـــابع را ارائـــه نمایـــد . مشتقات توابع مثلثاتی عبارت از:

11) $y=\sin x \Rightarrow y' =\cos x$

$y=\sin u \Rightarrow y' =u'.\cos u$

12) $y=\cos x \Rightarrow y' =-\sin x$

$y=\cos u \Rightarrow y' =-u'.\sin u$

13) $y=\tan x \Rightarrow y' =\sec^2 x$

$y=\tan u \Rightarrow y' =u' \sec^2 u$

14) $y=\cot x \Rightarrow y' =-\csc^2 x$

$y=\cot u \Rightarrow y' =-u' \csc^2 u$

15) $y=\sec x \Rightarrow y' =\sec x.\tan x$

$y=\sec u \Rightarrow y' =u' \sec u.\tan u$

16) $y=\csc x \Rightarrow y' =-\csc x.\cot x$

$y=\csc u \Rightarrow y' =-u' \csc u.\cot u$

مشـــتقات توابـــع لوگـــارتمی و نمـــائی (اکسپوننشـــیل): در حالیکـه x متحـول و $u=f(x)$ یک تابع را ارائه نماید ، توابع لوگارتمی و نمائی قرار ذیل اند.

17) $y=\ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$

$y=\ln u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}$

18) $y=\log_a^x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}.\log_a^e$

$y=\log_a^u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{u}.\log_a^e$

19) $y=e^x \Rightarrow y' = e^x$

$y=e^u \Rightarrow y' = u'.e^u$

20) $y=a^x \Rightarrow y' = a^x.\ln a \qquad ,a\neq 1, a>0$

$y=a^u \Rightarrow y' = u`\cdot a^u.\ln a \qquad ,a\neq 1, a>0$

21) $y=u^v \Rightarrow y' = u^v\left(v'.\ln u + \dfrac{v.u'}{u}\right)$

مشتقات توابع معکوس مثلثاتی:

22.هرگـــاه $x=\sin y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=\arcsin x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

22) $y=\arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arcsin u \Rightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

23.هرگـــاه $x=\cos y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=\arccos x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

23) $$y=\arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=\arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

24.هرگـــاه $x=\tan y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=\arctan x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

24) $$y=\arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y=\arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

25.هرگـــاه $x=\cot y$ باشـــد ، پـــس تـــابع معکـــوس ان $y=arc\cot x$ بـــوده کـــه مشـــتق آن عبارت از:

25) $$y=arc\cot x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$y=arc\cot u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

26.هرگاه $x=\sec y$ باشد ، پس تابع معکوس ان $y=arc\sec x$ بوده که مشتق آن عبارت از:

$$26)\quad y=arc\sec x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=arc\sec u \Rightarrow y' = \frac{u`}{u\sqrt{u^2-1}}$$

27.هرگاه $x=\csc y$ باشد ، پس تابع معکوس ان $y=arc\csc x$ بوده که مشتق آن عبارت از:

$$27)\quad y=arc\csc x \Rightarrow y' = \frac{-x'}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$y=arc\csc u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

مشتقات مرتبه بلند: هرگاه تابع $y=f(x)$ مشتق پذیر باشد ، مشتق مرتبه اول آن $y`=f`(x)$ ، مشتق مرتبه دوم آن $y``=f``(x)$ ، مشتق مرتبه سوم آن $y```=f```(x)$ و ... $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ میباشد.

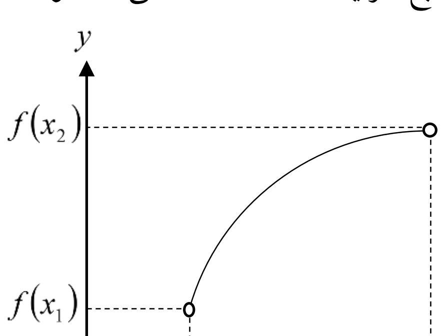
قابل یاد آوری است که در تابع پولینومیل $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ مشتق $(n)-$ ام تابع مذکور عبارت از $f^{(n)}(x)=a_n\cdot n!$ و مشتق $(n+1)$ ام آن صفر میباشد. یعنی $f^{(n+1)}(x)=0$

تحولات توابع (موارد استعمال مشتق)

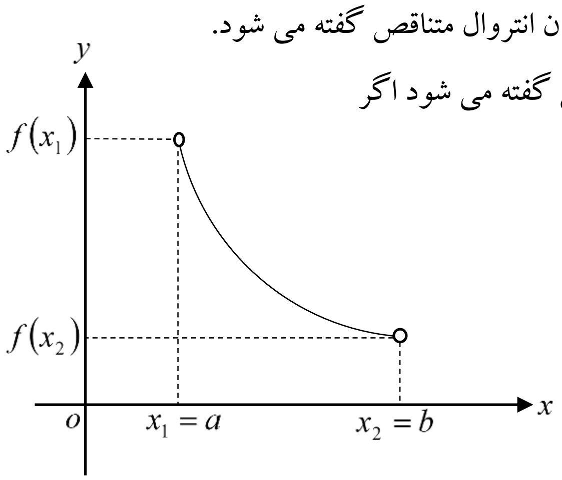
مشتق موارد استعمال زیاد دارد ، مثلاً در فزیک تمام معادلات مربوط به حرکت ، سرعت و تعجیل با استفاده از مشتق حل می گردد. تحولات تابع ، نقطه اعظمی ، نقطه اصغری ، ساحه متزاید ، ساحه متناقص توابع ، در محاسبات علم کیمیا ، کیمیا صنعتی ، انجنیری و غیره میتوان از آن استفاده به عمل آورد ، که ذیلاً به تحلیل آن می پردازیم.

1. **تابع ثابت:** هرگاه مشتق اول یک تابع برای همیشه صفر باشد ، یعنی $f'(x)=0$ باشد ، در این صورت $f(x)=c$ تابع ثابت گفته میشود.
2. **تابع متزاید:** هرگاه اشاره مشتق اول تابع $y=f(x)$ در یک انتروال (a,b) مثبت باشد ، یعنی $f'(x)>0$ باشد ، تابع در همان انتروال متزاید گفته می شود.

یا به عباره دیگر اگر $x_1<x_2$ باشد ، تابع متزاید گفته می شود اگر $f(x_1)<f(x_2)$ باشد.



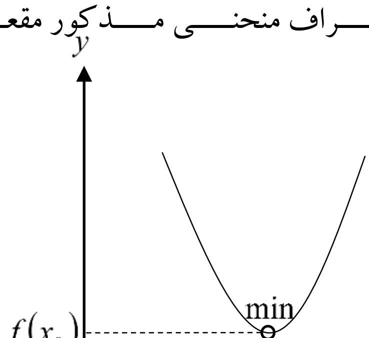
3. **تابع متناقص:** هرگاه اشاره مشتق اول تابع $y = f(x)$ در یک انتروال (a,b) منفی باشد ، یعنی $f`(x) < 0$ باشد ، تابع در همان انتروال متناقص گفته می شود.
یا به عباره دیگر اگر $x_1 < x_2$ باشد ، تابع متناقص گفته می شود اگر $f(x_1) > f(x_2)$ باشد.



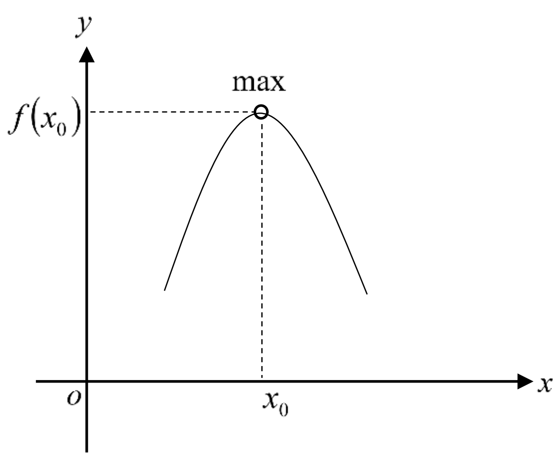
نقاط بحرانی $(Extreme)$ **توابع:** نقاط بحرانی توابع عبارت از نقاط اصغری و اعظمی توابع میباشد که عبارت اند از:

1. **نقطه اصغری** *Minimum***:** هرگاه اشاره مشتق یک تابع در یک نقطه معین x_0 از منفی به مثبت تبدیل گردد ، یعنی در همان نقطه معین x_0 منحنی تابع از حالت تناقص به حالت تزاید تبدیل گردد همان نقطه تابع را نقطه اصغری $(\min)$ می نامند.

به عباره دیگر هرگاه در تابع $y = f(x), f`(x) = 0, f``(x) > 0$ باشد ، نقطه $[x_0, f(x_0)]$ را اصغری $(\min)$ نامیده و خصوصیت گراف منحنی مذکور مقعر است.

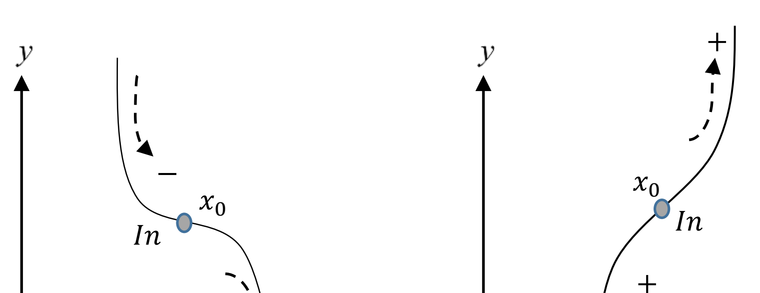


2. **نقطــه اعظمــی** *Maximum*: هرگــاه اشــاره مشــتق یــک تــابع در یــک نقطــه معــین x_0 از مثبــت بــه منفــی تبــدیل گــردد ، یعنــی در همــان نقطــه معــین x_0 منحنــی تــابع از حالــت تزاید به حالت تناقص تبدیل گردد همان نقطه تابع را نقطه اعظمی $(\max)$ می نامند.
بــه عبــاره دیگــر هرگــاه در تــابع $y=f(x)$ $f``(x)<0, f`(x)=0,$ باشــد ، نقطــه $[x_0, f(x_0)]$ را اعظمــی $(\max)$ نامیــده و خصوصــیت گــراف منحنــی مــذکور محــدب است.



نقطــه انعطــاف *Inflection*: نقطــه کــه انتــروال هــای محــدب بــودن و مقعــر بــودن گــراف تــابع را از همــدیگر جــدا مــی ســازد بنــام نقطــه انعطــاف یــاد میگــردد، و یــا بــه عبــارهٔ دیگــر هرگــاه اشــاره مشــتق یــک تــابع در یــک نقطــه معــین x_0 از منفــی بــه صــفر و دوبــاره بــه منفــی و یــا از مثبــت بــه صــفر و دوباره به مثبت تبدیل گردد نقطه مذکور را نقطه انعطاف (In) می نامند.

زمــانی یــک تــابع دارای نقطــه انعطــاف میباشــد کــه $f``(x)\neq 0$ بــوده کــه جهــت دریافــت آن $f``(x)=0$ قرار داده میشود.



تحولات توابع مثلثاتی:

1. **تحول تابع** $y=\sin x$**:** این تابع پریودیک بوده که ساحه تحول آن بین $[-1,+1]$ و پریود آن به اندازه (2π) می باشد ، و در انتروال $[0,2\pi]$ دارای نقاط ذیل می باشد.

$f(x)=\sin x \quad , \qquad [0,2\pi]$

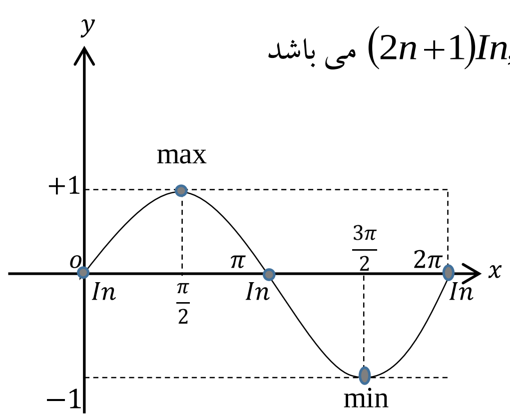
دارای یک نقطه اعظمی در $\max\left(\frac{\pi}{2},+1\right)$

دارای یک نقطه اصغری در $\min\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$

و دارای سه نقطه انعطاف در $(0,0),(\pi,0),(2\pi,0)$ می باشد.

که به طور عموم برای n پریود دارای $(n)\max,(n)\min,(2n+1)In$ می باشد

که گراف فوق در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:



در نتیجه تابع $y=\sin x$ در انتروال های $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ متزاید و در انتروال های $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ و $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ متناقص می باشد.

2. **تحـــول تـــابع** $y=\cos x$: ایـــن تـــابع پریودیـــک بـــوده کـــه ســـاحه تحـــول آن بـــین $[-1,+1]$ و پریـــود آن بـــه انـــدازه (2π) مـــی باشـــد ، و در انتـــروال $[0,2\pi]$ دارای نقـــاط ذیل می باشد.

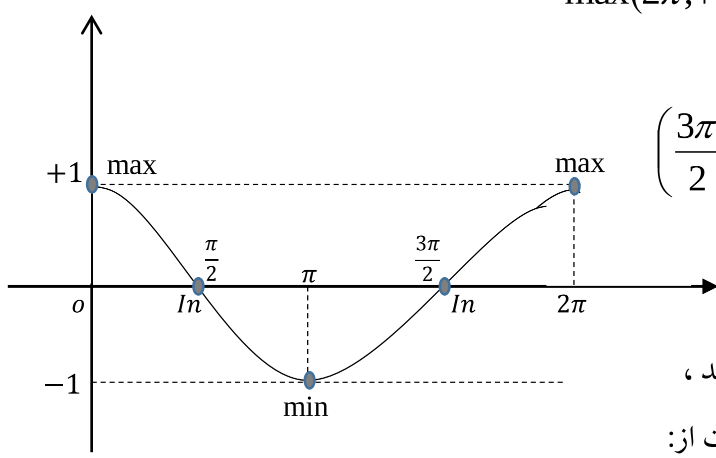
$$f(x)=\cos x\ ,\qquad [0,2\pi]$$

دارای دو نقطه اعظمی در $\max(2\pi,+1),\max(0,+1)$

دارای یک نقطه اصغری در $\min(\pi,-1)$

و دارای دو نقطه انعطاف در $\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

می باشد.



که به طور عموم برای n پریود دارای $(2n)In,(n)\min,(n+1)\max$ می باشد ، که گراف فوق در انتروال $[0,2\pi]$ عبارت از:

در نتیجـــه تـــابع $y=\cos x$ در انتـــروال هـــای $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ متنـــاقص و در انتروال های $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ متزاید می باشد.

طوریکـــه قـــبلاً ذکـــر نمـــودیم تـــابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ توابـــع پریودیـــک مـــی باشـــد ، یعنـــی $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$ و $\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$ اســـت. بنـــاً پریـــود را کـــه در انتـــروال $[0,2\pi]$ دارنـــد عـــین پریـــود را در انتـــروال هـــای $[2\pi,4\pi],[4\pi,6\pi],\cdots$ نیـــز طی خواهند کرد.

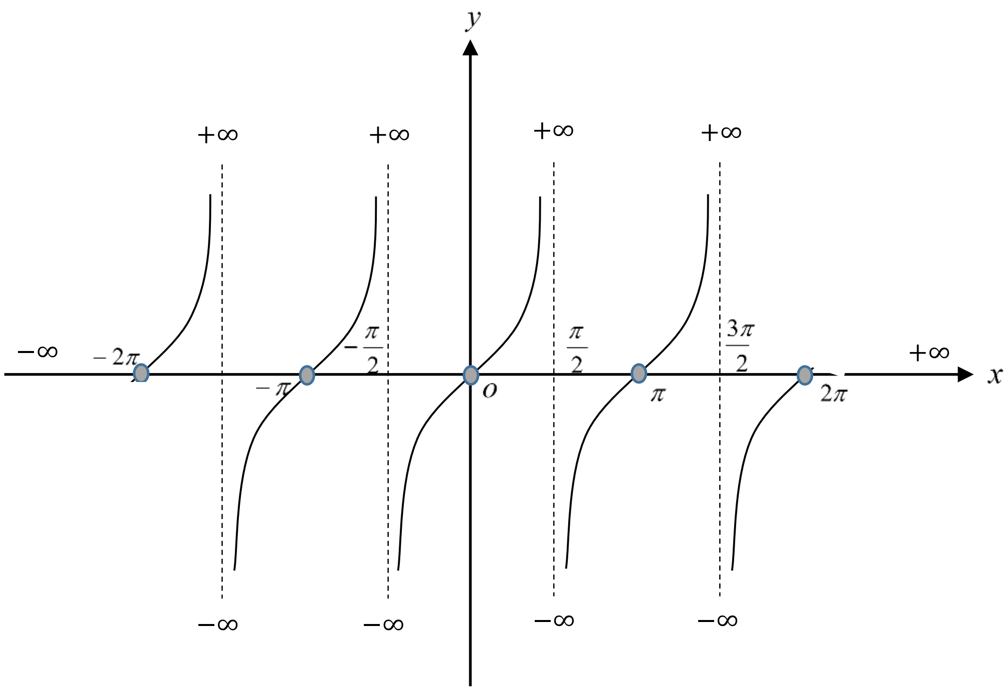
3. **تحـــول تـــابع** $y=\tan x$: ایـــن تـــابع نیـــز پریودیـــک بـــوده کـــه پریـــود آن بـــه انـــدازه π اســـت ، یعنـــی $\tan(x\pm\pi)=\tan x$ بـــوده و ســـاحه تحـــول آن بـــین $(-\infty,+\infty)$ و یـــک تـــابع همیشـــه متزایـــد اســـت ، نقـــاط اکســـتریم (اعظمـــی و اصـــغری) نـــدارد ، امـــا بـــی نهایـــت نقـــاط انعطـــاف دارد ، چـــون تـــابع مـــذکور در شـــکل $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ تبـــدیل مـــی گـــردد ، پـــــس ناحیـــــه تعریـــــف تـــــابع مـــــذکور $\cos x\neq 0$ بـــــوده ، یعنـــــی :

زیرا به همین قیمت ، $set\ domain = IR - \left\{ x / x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in z \right\}$ زوایا تابع دارای مجانب های عمودی می باشد که این مجانب ها عبارت اند از :

$$\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$$

گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty, \infty)$ عبارت از:

x	$-\infty \ldots$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	……	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$



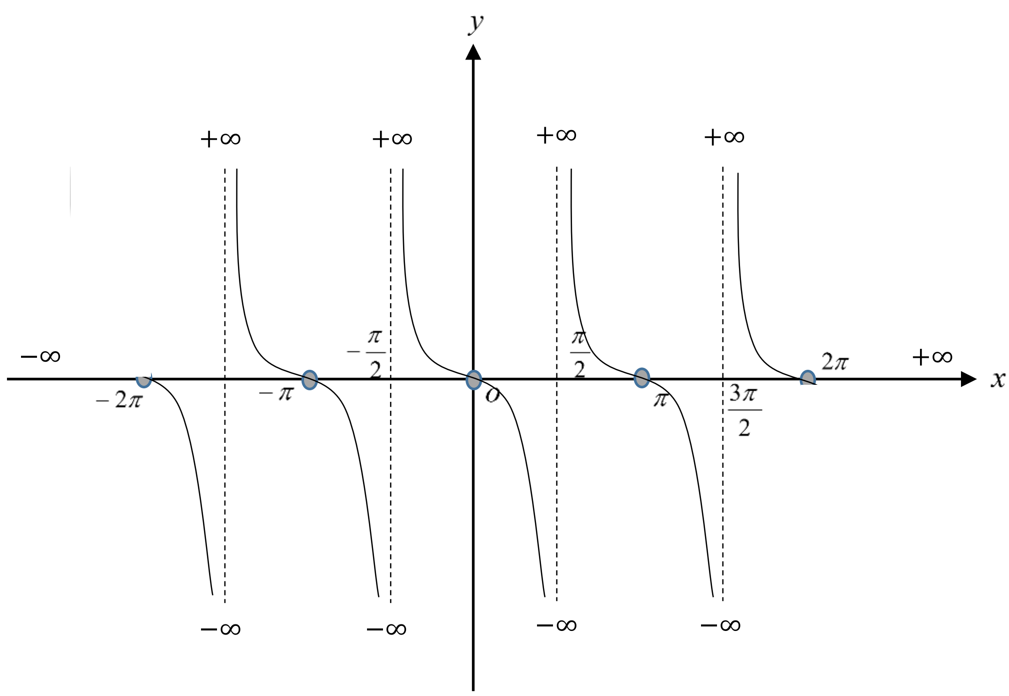
طوریکه در شکل ملاحظه می گردد تابع مذکور دارای بی نهایت نقاط انعطاف مانند : $\cdots, (-2\pi,0), (-\pi,0), (0,0), (\pi,0)$ می باشد.

4. **تحول تابع** $y = \cot x$: این تابع نیز پریودیک بوده که پریود آن به اندازه π است ، یعنی $\cot(x \pm \pi) = \cot x$ بوده و ساحه تحول آن بین $(-\infty, +\infty)$ و یک تابع همیشه متناقص است ، نقاط اکستریم (اعظمی و اصغری) ندارد ، اما بی نهایت نقاط انعطاف دارد ، چون تابع مذکور در شکل $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ تبدیل می گردد ، پس ناحیه تعریف تابع مذکور $\cos x \neq 0$ بوده ، یعنی :

$set\ domain = IR - \left\{ x/x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z \right\}$ ، زیـــــرا بـــــه همـــــین قیمـــــت زوایـــا تـــابع دارای مجانـــب هـــای عمـــودی مـــی باشـــد کـــه ایـــن مجانـــب هـــا عبـــارت انـــد از : $\cdots,-2\pi,-\pi,0,+\pi,+2\pi,\cdots$

گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty,\infty)$ عبارت از:

x	$-\infty \ldots$	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
y	$\ldots \ldots$	$+1$	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$	$+1$	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$



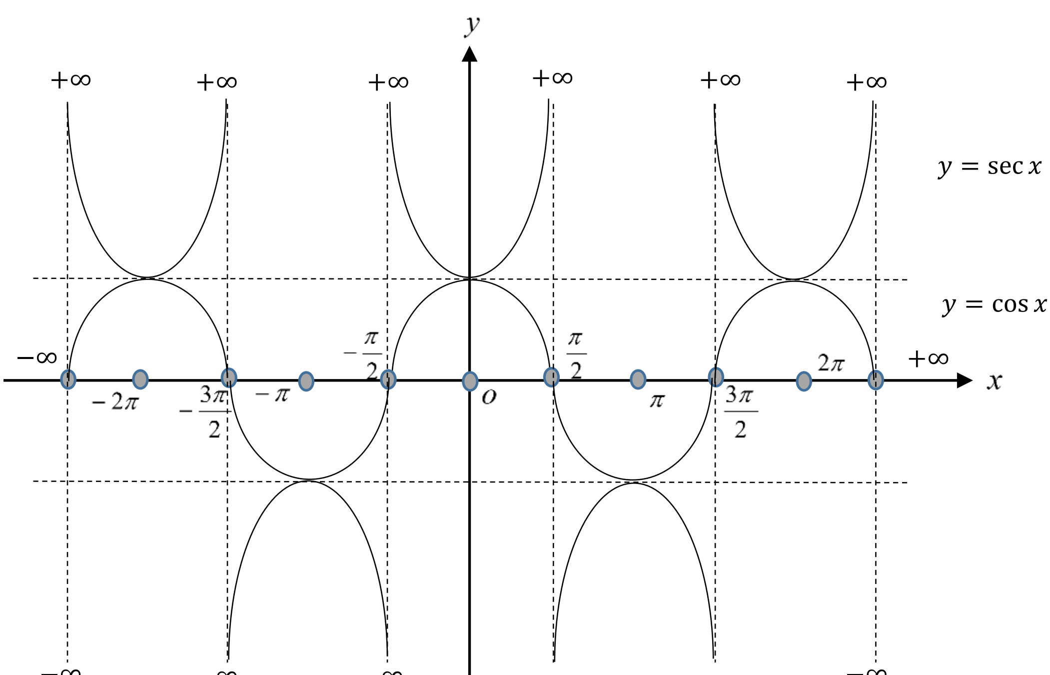
طوریکـــه در شـــکل ملاحظـــه مـــی گـــردد تـــابع مـــذکور دارای بـــی نهایـــت نقـــاط انعطـــاف ماننـــد : $\left(\frac{3\pi}{2},0\right),\left(\frac{\pi}{2},0\right),\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\left(-\frac{3\pi}{2},0\right),\cdots$ می باشد.

5. **تحـــول تـــابع** $y = \sec x$**:** ایـــن تـــابع نیـــز پریودیـــک بـــوده کـــه پریـــود آن بـــه انـــدازه 2π اســـت ، و ســـاحه تحـــول آن بـــین $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ بـــوده ،دارای نقـــاط اکســـتریم (اعظمـــی و اصـــغری) مـــی باشـــد ، نقطـــه انعطـــاف نـــدارد ، زیـــرا تـــابع مـــذکور در شـــکل $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ تبـــدیل مـــی گـــردد ، پـــس ناحیـــه تعریـــف تـــابع مـــذکور $\cos x \neq 0$ بـــوده ، یعنـــی :

$set\ domain = IR - \left\{ x / x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in z \right\}$ ، زیـــــرا بـــــه همـــــین قیمـــــت زوایــا تــابع دارای مجانــب هــای عمــودی مــی باشــد کــه ایــن مجانــب هــا عبــارت انــد از :

$$\cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}, +\frac{5\pi}{2}, \cdots$$

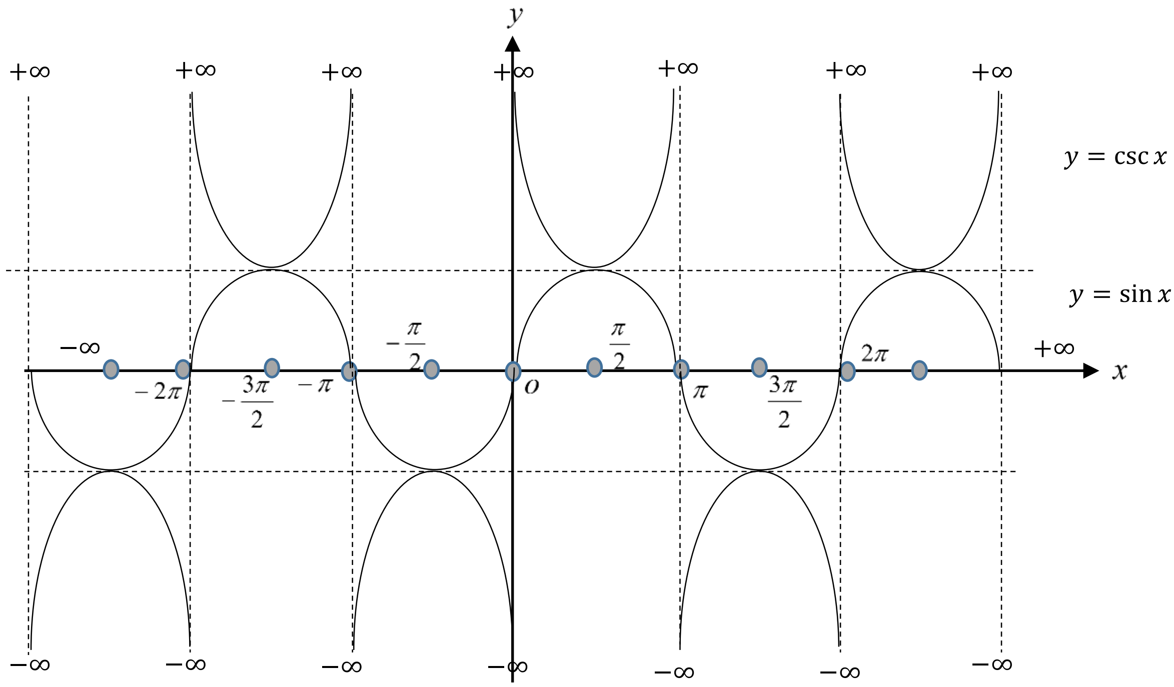
گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ عبارت از:



6. **تحـــول تـــابع** $y = \csc x$: ایــن تــابع نیــز پریودیــک بــوده کــه پریــود آن بــه انــدازه 2π اســـت ، و ســـاحه تحـــول آن بـــین $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ بـــوده ،دارای نقـــاط اکســـتریم (اعظمـــی و اصـــغری) مـــی باشـــد ، نقطـــه انعطـــاف نـــدارد ، زیـــرا تـــابع مـــذکور در شـــکل $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ تبـــدیل مـــی گـــردد ، پـــس ناحیـــه تعریـــف تـــابع مـــذکور $\sin x \neq 0$ بـــوده ، یعنـــی : $set\ domain = IR - \{x / x = n\pi, n \in z\}$ ، زیـــــرا بـــــه همـــــین قیمـــــت زوایــا تــابع دارای مجانــب هــای عمــودی مــی باشــد کــه ایــن مجانــب هــا عبــارت انــد از :

$$\cdots, -4\pi, -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi \cdots$$

گراف تابع فوق در انتروال $(-\infty,-1]\cup[+1,+\infty)$ عبارت از:



سوالات

1. اگر $f(3x-4)=(x^2-2)^3$ باشد آن وقت قیمت $f'(3x-4)$ عبارت از:

1) $2x(x^2-2)^2$ 2) $2x(x^2-4)$
3) $6x(x^2-2)^2$ 4) $2x(x^2+5x)$

2. اگر $g(x)=f(-25x)$, $g'(0)=125$ باشد آنگاه قیمت $f'(0)$ عبارت است از:

1) 5 2) -5 3) 25 4) -25

3. اگر $f(x)=x^5$ و $g(x)=x$ باشد، پس $\frac{d[f(x)\cdot g(x)]}{dx}$ مساوی است به:

1) $6f(x)$ 2) $3f(x)$ 3) $[f(x)]^5$ 4) $6g(x)$

4. اگر $x^2+y^2=100$ باشد، پس $y''(x)$ مساوی است به:

1) $y''(x)=\frac{100}{y^2}$ 2) $y''(x)=-\frac{100}{x^2}$
3) $y''(x)=\frac{100}{y^{-4}}$ 4) $y''(x)=-\frac{100}{y^3}$

5. تغییرات متوسط تابع $f(x)=10x^2+10$ در انتروال $[2,5]$ مساوی است به:

1) 72 2) 70 3) 80 4) 90

6. تابع $f(x)=3x^{50}+x^{40}+1$ داده شده است، پس $\frac{d^{49}f(x)}{dx^{49}}$ مساوی است به:

1) $150!\,x$ 2) $50!\cdot 3x$ 3) $150!$ 4) $3\cdot 50!$

.7 $f(x)=\frac{\ln^3 x^3+27}{\ln^3 x^3+8}$ باشد، پس $f'(1)$ مساوی است به:

1) $\frac{27}{8}$ 2) $\frac{54}{16}$ 3) $\ln^2 1$ 4) $\frac{8}{27}$

.8 هرگاه تابع $f(x)=|x^2-2x|+|3x-4|+x^3$ داده شده باشد در این صورت $f'(-2)$ عبارت از:

1) -5 2) 5 3) 3 4) -1

.9 هرگاه $f(x)=3x^2+2x$ و $g(x)=3x-4$ داده شده باشد، در این صورت $(fog)'(-1)$ عبارت از:

1) -40 2) -60 3) -80 4) -120

.10 هرگاه $f(x)=2x^2-x$ و $g(x)=1-x^2$ داده شده باشد در این صورت $(gof)'(2)$ عبارت از:

1) -102 2) -84 3) -64 4) -48

.11 تابع $f(x)=\left|\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right|$ در کدام یکی از نقاط ذیل مشتق ندارد:

1) $x=-1$ 2) $x=\frac{1}{2}$ 3) $x=-\frac{1}{2}$ 4) $x=1$

.12 اگر $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $\frac{-2x}{(x^2-2)^2}$ 2) $\frac{-x}{(x^2-2)^2}$ 3) $\frac{2}{(x^2-2)^2}$ 4) $\frac{x}{(x^2-2)^2}$

.13 تابع $f(x)=3x^{50}+x^{40}+1$ داده شده است، پس $\frac{d^{49}f(x)}{dx^{49}}$ مساوی است به:

1) $150!\,x$ 2) $50!\,3x$ 3) $150!$ 4) $3\cdot 50!$

.14 میل منحنی $f(x)=x^2-1$ در نقطه $P(1,0)$ مساوی است به:

1) 4 2) 4 3) -2 4) 2

.15 اگر $3x^2 + y^2 = 2$ باشد، پس $y''(x)$ مساوی است به:

1) $y'' = -\frac{1}{y^3}$ 2) $y'' = -\frac{2}{y^3}$ 3) $y'' = -\frac{3}{y^3}$ 4) $y'' = \frac{6}{y^3}$

.16 اگر $f(x) = e^{\ln(x+1)}$ باشد، پس $f'(2)$ مساوی است به:

1) 1 2) ∞ 3) -1 4) صفر

.17 مشتق مرتبه اول تابع $y = \ln \sqrt[3]{x^4 + 1}$ مساوی است به:

1) $\frac{4x^3}{3(x^4+1)}$ 2) $\frac{2x^3}{x^4+1}$ 3) $\frac{x^4}{x^4+1}$ 4) $\frac{x^3}{x^4+1}$

.18 اگر $f(x) = tan\theta$ و $g(x) = x^{15}$ باشند پس $\frac{d[f(x))g(x)]}{dx}$مساوی است به:

1) $15x^{14} \tan\theta + x^{15}$ 2) 0

3) $15x^{14} f(x)$ 4) $15x^{14} sec^2\theta$

.19 مشتق مرتبه پنجم تابع $f(x) = x^5 sin^5\alpha$مساویست به:

1) 120 2) $120 sin^5\alpha + sin\alpha - 1$

3) $12\ {}^5\alpha - sin\alpha$ 4) $120\ sin^5\alpha$

.20 تابع$f(x) = \frac{2x^{9!}}{(9!)!}$ داده شده است،$\frac{d^{9!}f(x)}{dx^9}$مساوی است یه:

1) $0!$ 2) $(9!)!$ 3) $2!$ 4) $\frac{1}{9!}$

.21 تابع $f(x) = (x^2 - y)^2$ داده شده است $\frac{df(x)}{dx}$ مساوی است به:

1) $6x(x^2 - y)^3$ 2) $3x(x^2 - y)^2 + sec^2 y$

3) $3(x^2 - y)^2 + sec^2 y$ 4) $6x(x^2 - y)^2$

.22 در تابع $f(x) = (6x^{50} + 1)^3 + (3x^{40} + 1)^4$, $\frac{d^{159} f(x)}{dx^{159}}$ عبارت از:

1) 2 2) $\ln 4$

3) $\ln 2 + \ln 2 \cos x$ 4) $cos^2 \ln \frac{1}{\sqrt{2}}$

.23 قیمت مشتق تابع $f(x) = \ln\left(\cos e^{x}\right)$ در $x = \ln \frac{\pi}{4}$ عبارت است از:

1) $-\frac{\pi}{4}$ 2) $e^{\frac{\pi}{4}}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $-\frac{\pi}{2}$

.24 $f(2x - 1) = x^3 - x^2 + 4x + 1$ باشد آنگاه قیمت ?= $f(3) + f'(3)$ عبارت از:

1) 15 2) 17 3) 19 4) 21

.25 اگر $y = \tan\left(ln \frac{1}{2} x\right)$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{x} \sec^2(\ln x)$ 2) $\frac{1}{x} \sec^2(\ln x - \ln 2)$

3) $\frac{1}{2x} \sec^2(\ln x)$ 4) $\frac{1}{x} \sec^2\left(\ln \frac{1}{2} x\right)$

.26 اگر $f(x) = \sin^5(2a + 1), a \in IR$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) 0 2) $5 \sin^4 a$ 3) 1 4) $5 \sin a$

.27 حاصل $(\sin^2 x)$ $\frac{1}{2cos2x}\cdot\frac{d}{dx}$ عبارت از:

1) $\frac{\tan 2x}{2}$ 2) $\frac{\cot x}{2}$

3) $\frac{\tan x}{2}$ 4) $\frac{\cot 2x}{2}$

.28 مشتق تابع $y = \operatorname{arccot} x$ عبارت است از:

1) $-\frac{1}{1+x^2}$ 2) $-\frac{2}{1+x^2}$ 3) $\frac{1}{1+x^2}$ 4) $\frac{2}{1+x^2}$

.29 مشتق مرتبه اول تابع $y = \cos^3 x$ عبارت است از:

1) $y' = -3\sin^3 x$ 2) $y' = -3\sin x \cdot \cos^2 x$

3) $y' = 3\sin x \cdot \cos^2 x$ 4) $y' = 3\sin^3 x$

.30 اگر $f(x) = \frac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x}$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $-4\sec^2 4x$ 2) $-\sec^2 x$

3) $\sec^2 4x$ 4) $4\sec^2 4x$

.31 مشتق تابع $y = arc \sin e^x$ مساوی است به:

1) $-\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 3) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ 4) $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

.32 مشتق مرتبه اول تابع $y = e^{x^2+1}$ مساوی است به:

1) xe^{x^2+1} 2) $-2xe^{x^2+1}$ 3) $2xe^{x^2+1}$ 4) $-xe^{x^2+1}$

.33 اگر $f(x) = 3^{3xcos\,\alpha}$ باشد،پس $\frac{d^5f(x)}{dt^5}$ مساوی است به:

1) $\ln 9$ 2) 0

3) $\cos\alpha \ln 9$ 4) $\cos\alpha \ln 3$

.34 $f(x)=\tan\left(\ln\frac{1}{2}x\right)$ باشد، پس $f'(x)$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{x}\sec^2(\ln x)$

2) $\frac{1}{x}\sec^2(\ln x-\ln 2)$

3) $\frac{1}{2x}\sec^2(\ln x)$

4) $\frac{1}{x}\sec^2(\ln\frac{1}{2}x)$

.35 مشتق مرتبه اول تابع $y=\ln\sqrt{x^2+4x+4}$ مساوی است به:

1) $\frac{x-1}{x^2+4x+4}$

2) $\frac{x+1}{x^2+4x+4}$

3) $\frac{x+2}{x^2+4x+4}$

4) $\frac{x-2}{x^2+4x+4}$

.36 مشتق ضمنی $x^2+xy+y^2-3=0$ را دریابید:

1) $y' = \frac{2x+2y}{2x+2y}$

2) $y' = \frac{2x+y}{x+2y}$

3) $y' = -\frac{2x+2y}{2x+2y}$

4) $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$

.37 اگر $x^2+y^2=100$ باشد، پس $y''(x)$ مساوی است به:

1) $y'(x)=\frac{100}{y^2}$

2) $y'(x)=-\frac{100}{y^{-5}}$

3) $y'(x)=-\frac{100}{y^{-4}}$

4) $y'(x)=-\frac{100}{y^2}$

.38 تابع $f(x)=5+x^2-x$ دارای نقطه اصغری است به خاطریکه :

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+x^2-x)=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+x^2-x)=+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+x^2-x)=\pm\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}(5+x^2+x)=-\infty$

.39 نقطه انعطاف تابع $f(x)=x^8+1$ عبارت از:

1) $(0,1)$

2) نقطه انعطاف ندارد

3) $(1,0)$

4) $(1,2)$

40. تابع $f(x) = (x-1)^2$ در یکی از انتروال های ذیل متزاید است:

1) $(\infty, 1)$ 2) $(-\infty, -2)$ 3) $(-\infty, -3)$ 4) $-\infty, 1)$

41. انتروال محدبیت تابع $y = -4x^2 + x^4$ عبارت از:

1) $(\sqrt{\frac{2}{3}}, \infty)$ 2) $\left(-\infty, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 3) $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 4) $\left\{\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$

42. انتروال تناقص تابع $f(x) = 22x^{15} + 22$ عبارت از:

1) $(-\infty, +\infty)$ 2) انتروال تناقص ندارد 3) $(0, +\infty)$ 4) $(-\infty, 0)$

43. نقطه اکسترمم تابع $f(x) = x^{100}$ عبارت است از:

1) $(1,1)$ 2) $(-1,1)$

3) $(0,0)$ 4) نقطه اکستریمم ندارد

44. نقطه اکستریمم تابع $f(x) = 50x^5$ عبارت است از:

1) $(1,50)$ 2) $(0,0)$

3) $(-1,-50)$ 4) نقطه اکسترمم ندارد

45. معادله محور تناظر تابع $f(x) = 5x^2 - 6x^3 + x - 1$ عبارت است از:

1) $y = \frac{5}{18}$ 2) $y = -\frac{5}{18}$ 3) $x = -\frac{5}{18}$ 4) $x = \frac{5}{18}$

46. گراف تابع $f(x) = 2^x$ در کدام یکی از نقاط ذیل انعطاف دارد:

1) 2 2) نقطه انعطاف ندارد 3) -2 4) $\ln 2$

.47 مختصات مرکز تناظر تابع $f(x)=\frac{8}{3}x^3-8x^2+1$ عبارت است از:

1) $A\left(-1,-\frac{29}{3}\right)$ 2) $A\left(-1,\frac{13}{3}\right)$

3) $A(0,1)$ 4) $A\left(1,-\frac{13}{3}\right)$

.48 راس گراف تابع $f(x)=-(x-21)^2+11$ عبارت ا

1) $(-21,11)$ 2) $(-21,-11)$ 3) $(21,-11)$ 4) $(21,11)$

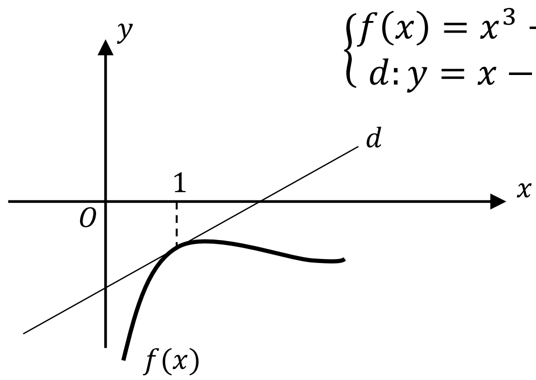
.49 انتروال تناقص تابع $f(x)=22x^{15}+22$ عبارت از:

1) $(-\infty,+\infty)$ 2) انتروال تناقص ندارد 3) $(0,+\infty)$ 4) $(-\infty,0)$

.50 پریود تابع $f(x)=100\tan\frac{12x}{5}$ مساوی است به:

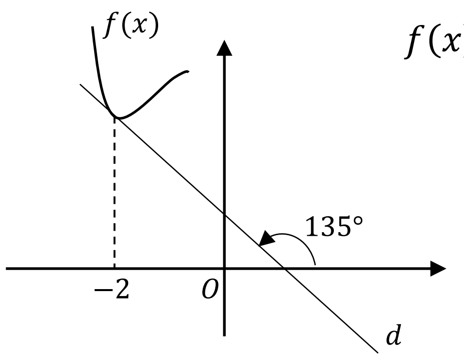
1) $\frac{12\pi}{10}$ 2) $\frac{12\pi}{5}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$ 4) $\frac{5\pi}{12}$

.51 با در نظر داشت شکل ذیل هرگاه $\begin{cases} f(x)=x^3+ax^2+x \\ d: y=x-3 \end{cases}$
داده شده باشد، قیمت a عبارت از:



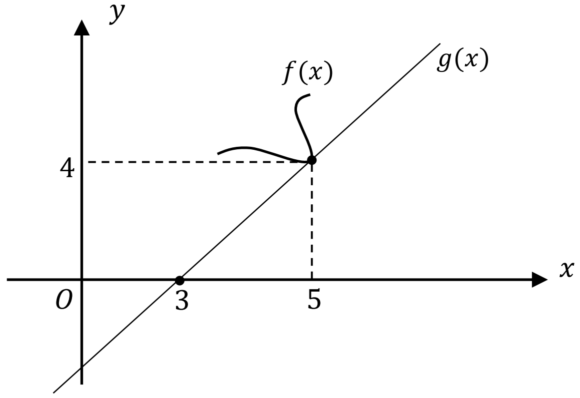
1) $-\frac{5}{2}$
2) $-\frac{3}{2}$
3) $\frac{1}{2}$
4) $\frac{5}{2}$

.52 با در نظر داشت شکل ذیل هرگاه $f(x)=2x^3+x^2-ax$
داده شده باشد، قیمت a عبارت از:



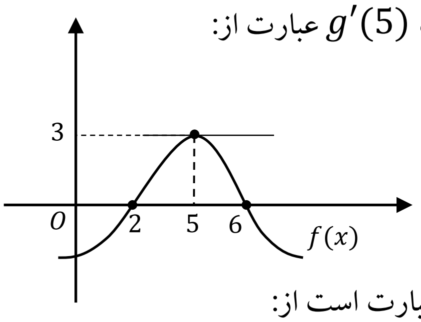
1) -27
2) 17
3) -23
4) 21

.53 بادر نظر داشت شکل ذیل هرگاه $h(x)=g(x)\cdot f(x)-3x^2$ باشد، قیمت $h'(5)$ عبارت از:



1) -16
2) -14
3) -12
4) -10

.54 با درنظرداشت شکل ذیل هرگاه $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ باشد قیمت $g'(5)$ عبارت از:



1) $-\frac{3}{5}$
2) $-\frac{3}{25}$
3) $\frac{3}{5}$
4) $\frac{3}{25}$

.55 نزدیکترین فاصله نقطه $(0,0)$ از منحنی $\mathrm{y}^2=2\mathrm{x}+3$ عبارت است از:

1) 2
2) $\sqrt{2}$
3) $\sqrt{3}$
4) $2\sqrt{3}$

.56 نزدیکترین فاصله نقطه $(0,0)$ از منحنی $\mathrm{y}^2=2\mathrm{x}+5$ عبارت است از:

1) -2
2) 2
3) $\sqrt{7}$
4) $\sqrt{5}$

.57 مجانب عمودی تابع $y=\csc x$ در انتروال $\left[-\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ عبارت است از:

1) $x=\frac{3\pi}{2}, x=-\frac{3\pi}{2}$
2) $x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}$
3) $x=-\frac{3\pi}{2}, x=\frac{\pi}{3}$
4) $x=-\pi, x=\pi, x=0$

.58 نقطه اکستریمم تابع $f(x)=200x^{15}$ عبارت است از:

1) نقطه اکستریمم ندارد
2) $(-1,200)$
3) $(1,200)$
4) $(0,0)$

فصل دوازدهم

انتیگرال

قبل بر اینکه بر مفهوم انتیگرال وارد شویم میخواهیم بدانید زمانیکه مساحت سطح که توسط یک منحنی گراف تابع $y = f(x)$ که در یک انتروال بسته $[a, b]$ متمادی و تعریف گردیده است و دارای شکل هندسی نمی باشد چطور قابل ملاحظه می باشد؟ تیوری این نوع محاسبه اولاً توسط ارشمیدس و بعداً به کمک انتیگرال توسط علمای دیگر مانند برنولی ، نیوتن ، لایبنز ، کوشی ، مالکورین ... دنبال گردید است انتروال بسته $[a, b]$ منحنی تابع مذکور را به n مستطیل ها تقسیم می نماییم طوریکه عرض مستطیل ها از رابطه $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ و طول این مستطیل ها عبارت از قیمت تابع در همان نقطه می باشد پس (با در نظر مجموع ریمان این مجوع عبارت از $\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)\cdot \Delta x\right)$ بوده که اگر از مجموعه مذکور لیمت بگیریم یعنی $\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)\cdot \Delta x\right)$ می توان مساحت سطح را که توسط منحنی احاطه گردیده دریافت نماییم.

پس می توان گفت انتیگرال عبارت از تابع است که مشتق آن معین می باشد و یا به عبارهٔ دیگر انتیگرال عبارت از لیمت مجموعهٔ عددی است (مجموع ریمان را انتیگرال می نامند) که به وسیله علامه ($\int$) ارائه می گردد. یعنی:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)\cdot\Delta x\right)=\int f\left(x\right)dx$$

که در رابطه فوق $f\left(x\right)$ را تابع و dx را متغیر انتیگرال گیری نظر به متحول x می گویند.

انتیگرال ها معمولاً بدو نوع اند : انتیگرال غیر معین و انتیگرال معین که هر یک را توضیح می نماییم.

انتیگرال غیر معین:

تعریف: هرگاه تابع $f\left(x\right)$ در انتروال بسته $[a,b]$ تعریف و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد ، ست توابع $f(x)+C$ (درحالیکه C یک عدد ثابت اختیاری است) بنام انتیگرال غیر معین از تابع $f(x)$ گفته می شود ، و چنین ارایه می گردد.

$$\int f\left(x\right)dx=F\left(x\right)+C$$

خواص اولیه انتیگرال غیر معین:

1. در صورتیکه K یک عدد ثابت باشد ، داریم که:

$$\int Kdx=K\int dx=Kx+c$$

2. در صورتیکه $n\neq-1$ باشد ، داریم که:

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$$

3. در حالیکه K یک عدد ثابت و $f(x)$ یک تابع را ارایه نماید ، داریم که:

$$\int K\cdot f\left(x\right)dx=K\int f\left(x\right)dx$$

4. هرگاه $f(x)$ و $g(x)$ توابع را ارائه نمایند ، پس حاصل جمع و حاصل تفریق آنها تحت انتیگرال عبارت از:

$$\int\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)dx=\int f\left(x\right)dx\pm\int g\left(x\right)dx$$

5. انتیگرال ترادف توابع مساوی است به مجموع انتیگرال هر حد آن ، یعنی:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)dx$$

به خاطر داشته باشید که:

1) $\int f(x)\cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$

2) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}, g(x)\neq 0$

انتیگرال های اساسی: با در نظر داشت مشتقات توابع ، انتیگرال بعضی توابع اساسی را بحیث اولین منبع انتیگرال گیری برای ساده ترین شکل راه حل سوالات انتیگرال قرار ذیل در نظر گرفت.

1) $\int kdx = kx + c$

2) $\int x^{a} dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c$ $\quad\quad$ $\int u^{a} du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1$

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + c$ $\quad\quad$ $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + c, u \neq 0$

4) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$ $\quad\quad$ $\int a^{u} du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + c, a > 1$

5) $\int e^{x} dx = e^{x} + c$ $\quad\quad$ $\int e^{u} du = e^{u} + c$

6) $\int \cos x dx = \sin x + c$ $\quad\quad$ $\int \cos u du = \sin u + c$

7) $\int \sin x dx = -\cos x + c$ $\quad\quad$ $\int \sin u du = -\cos u + c$

8) $\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$ $\quad\quad$ $\int \tan u du = \ln|\sec u| + c$

9) $\int \sin^{2} u du = \dfrac{1}{2} u - \dfrac{1}{4} \sin 2u + c$

10) $\int \dfrac{du}{\cos^{2} u} = \tan u + c$

11) $\int \dfrac{du}{\sin^{2} u} = -\cot u + c$

12) $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^{2}}} = \arcsin u + c$

13) $\int \dfrac{du}{1+u^{2}} = \arctan u + c$

14) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^{2} \pm 1}} = \ln\left(\left|u + \sqrt{u^{2} \pm 1}\right|\right) + c$

15) $\int \dfrac{du}{u^{2} - 1} = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{u-1}{u+1}\right| + c$

16) $\int x e^{-ax} dx = -\dfrac{1}{a^{2}} (ax + 1) e^{-ax} + c$

17) $\int x^2 e^{-ax}dx = -\frac{1}{a^3}\left(a^2x^2 + 2ax + 2\right)e^{-ax} + c$

18) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + c$

19) $\int \frac{xdx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}} + c$

20) $\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\left(x^2 + a^2\right)^{\frac{1}{2}}} + c$

21) $\int \frac{xdx}{x+d} = x - d(\ln x + d) + c$

انتیگرال گیری بوسیله تعویض: با درنظر داشت مشتق توابع مرکب یعنی:

$$\frac{dF(g(x))}{dx} = F^`(g(x)) \cdot g^`(x)$$

می توان انتیگرال آنرا چنین نوشت: $\int F^`(g(x)) \cdot g^`(x)dx = F(g(x)) + c$

رابطه اخیر که اساس انتیگرال گیری بوسیله تعویض را بیان می نماید طوریکه اگر $g(x) = u, F^` = f$ تعویض گردد ، پس $du = g^`(x) \cdot dx$ خواهد گردید ، بناً می توان نوشت:

$$\int f(g(x)) \cdot g^`(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

بناً در این طریقه توجه گردد که متحول تابع تحت انتیگرال از جنس یک متحول مناسب طوری تعویض گردد که انتیگرال مربوط آن نظر به متحول جدید پیشبینی شده بتواند که باید بعد از دریافت انتیگرال ، متحول قبلی در تابع اولیه مجدداً گذاشته شود.

انتیگرال های قسمی: با استفاده از مشتق حاصل ضرب دو تابع $u = f(x)$ و $v = g(x)$ می توان نوشت:

$$(u \cdot v)^` = u^` \cdot v + u \cdot v^`$$
$$v^` \cdot u = (u \cdot v)^` - u^` \cdot v$$
$$\int v^` \cdot udx = \int (u \cdot v)^` - \int u^` \cdot vdx$$
$$\Rightarrow \int udv = u \cdot v - \int vdu$$

محاسبه انتیگرال بوسیله کسور قسمی: با استفاده از تجزیه کسر ها به کسور قسمی آن که قبلاً مطالعه نمودیم ، می توان انتیگرال بعضی از توابع را به چند انتیگرال تبدیل نموده و به حل آن اقدام نماییم ، بطور مثال:

1) $\int \frac{x+5}{x^2+4}dx = ?$

$$\Rightarrow \int \frac{x+5}{x^2+4}dx = \int \left(\frac{x}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+4}\right)dx = \underbrace{\int \frac{xdx}{x^2+4}}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{5dx}{x^2+4}}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{xdx}{x^2+4} = ?$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x^2+4 \\ du = 2xdx \\ \frac{du}{2} = xdx \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{xdx}{x^2+4} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c_1$$

$$= \int \frac{xdx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + c_1$$

$$I_2 = \int \frac{5dx}{x^2+4} = ?$$

$$\Rightarrow \int \frac{5dx}{x^2+4} = 5\int \frac{dx}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)} = \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{x}{2} \\ du = \frac{1}{2}dx \\ dx = 2du \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{5}{4}\int \frac{2du}{u^2+1} = \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{5}{2}\arctan u + c_2$$

$$= \int \frac{5dx}{x^2+4}dx = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c_2$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+5}{x^2+4}dx = I_1 + I_2$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+5}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

انتیگرال معین: لیمت مجموع ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a,b]$ زمانیکه $n \to \infty$ و بزرگترین طول انتروال های فرعی Δx به طرف صفر تقرب نماید ، انتیگرال معین تابع $f(x)$ از $x = a$ الی $x = b$ یاد می گردد ،

یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

که a را سرحد پایینی و b را سرحد بالایی انتیگرال مذکور می نامند.

خواص انتیگرال معین:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3) $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K\int_a^b f(x)dx, K = constant$

4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6) $m \le f(x) \le M \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

مثال 1: قیمت انتیگرال ذیل را دریابید؟

$$\int_1^3 5x^2 dx = ?$$

$$\int_1^3 5x^2 dx = 5\int_1^3 x^2 dx = 5 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1}|_1^3 = \frac{5}{3}x^3 |_1^3 = \frac{5}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{5}{3}(27-1) = \frac{130}{3} = 43.3$$

سوالات

.1 $\int \frac{\ln^2 x^8 dx}{\ln^2 x^4}$ مساوی است به:

1) $\frac{1}{2}\ln^2 x^8 + c$ 2) $4x + c$ 3) $2x + c$ 4) $\frac{1}{2}\ln x^4 + c$.

.2 $\int \sqrt{3^x}3^x dx$ مساوی است به:

1) $5\sqrt[3]{3^x}$ 2) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3^x}\right)^3$

3) $\frac{2}{\ln 27}3^{2x}\sqrt{3^x} + c$ 4) $\frac{2\cdot 3^{x-1}}{\ln 3}\sqrt{3^x} + c$

.3 انتیگرال $\int (ax^2 + x + 1)^5 (2ax + 1)dx$ مساوی است به:

1) $-\frac{(ax^2+x+1)^6}{6} + c$ 2) $\frac{(ax^2+x+1)^2}{6} + c$

3) $\frac{(ax^2+x+1)^6}{6} + c$ 4) $\frac{(ax^2+x+1)^6}{6} + c$

.4 $\int \frac{(x+2)^2-16}{x+6} dx$ مساوی است به:

1) $\frac{x^2}{2} - 6x + c$ 2) $-\frac{x^2-4x}{2} + c$

3) $-\frac{4x^2-x}{2} + c$ 4) $\frac{x^2}{2} + 6x + c$

.5 $\int \tan x \, d(\tan x)$ مساوی است به:

1) $-\ln|\cos x| + c$ 2) $\frac{\tan^2 x}{2} + c$ 3) $\ln|\cos x| + c$ 4) $\tan^2 x = c$

.6 $\int \frac{(x^6-1)(x^6+1)}{x^8}dx$ مساوی است به:

1) $x^5 + x^{-7} + C$

2) $\frac{x^5}{5} + \frac{1}{7x^7} + C$

3) $x^5 - x^{-7} + C$

4) $\frac{x^5}{5} - \frac{1}{7x^7} + C$

.7 $\int 10^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$ مساوی است به:

1) $\frac{5^x}{\ln 5} + C$

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x + C$

3) $\frac{10^x}{\ln 10} + C$

4) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + C$

.8 $\int \sqrt{\tan x}\sec^2 x\,dx$ مساوی است به:

1) $\frac{2}{3}\tan x\sqrt{\tan x} + c$

2) $\frac{2}{3}\sqrt{\tan x^3 + c}$

3) $\frac{2}{3}\sqrt{\tan^3 x} + c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt{\tan^3 x} + c$

.9 $\int \sin x^2\, d(x^2)$ مساوی است به:

1) $-\cos x^2 + c$

2) $\frac{\sin^2 x}{2} + c$

3) $-\cos^2 x + c$

4) $-\cos x + c$

.10 $\int e^x\sqrt{e^x + 2}\,dx$ مساوی است به:

1) $\frac{2e^x+4}{3}\sqrt{e^x + 2} + c$

2) $\frac{3}{2}\sqrt{(e^x + 2)3} + c$

3) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{e^x + 3} + c$

4) $\frac{2}{3}e^x\sqrt{e^x + 2} + c$

11. $\int xe^{x^2}dx$ مساوی است به:

1) $2xe^{x^2}+c$ 2) $\frac{1}{2}e^{x^2}+c$ 3) $-\frac{1}{2x}e^{x^2}+c$ 4) $\frac{1}{2x}e^{x^2}+c$

12. حاصل انتیگرال $\int \tan^2 x\,dx$ مساوی است به:

1) $\tan x - x + c$ 2) $\tan x + x + c$ 3) $\tan x$ 4) $\cot x$

13. $x>0, \int e^{e^{\ln x}}dx$ مساوی است به:

1) $e^{\ln x}$ 2) $\mathrm{e}^{\ln x}+c$

3) $\ln x e^{\ln x}+c$ 4) $\frac{1}{\ln x}e^{\ln x}+c$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}csc\sqrt{x}}$ مساوی است به:

1) $\frac{2}{\sqrt{x}\csc\sqrt{x}}$ 2) $-\frac{1}{2\sec\sqrt{x}}+c$

3) $-\frac{2}{\sec\sqrt{x}}+c$ 4) $\frac{1}{2\sec\sqrt{x}}+c$

15. $x\neq 1, x>0, \int \frac{dx}{\log_{\mathrm{x}} 7}$ مساوی است به:

1) $\frac{x}{\log_7 x}+c$ 2) $\frac{\mathrm{x}}{\log_7\left(\frac{x}{c}\right)}+c$ 3) $\mathrm{x}\log_{\frac{\mathrm{x}}{3}}7+c$ 4) $\mathrm{x}\log_7\frac{x}{e}+$

16. $\int \ln 2x dx$ مساوی است به:

1) $x(\ln|2x|-1)+c$ 2) $2xln\,2x+c$

3) $xln\,2x+c$ 4) $xln(2x+1)+c$

17. $\int \ln\left(\sqrt{x}\right)^7 dx$ مساوی است به:

1) $\frac{7}{2}x(\ln|x|-1)+C$
2) $-\frac{2}{7}x(\ln|x|-1)+C$
3) $\frac{2}{7}x(\ln|x|-1)+C$
4) $-\frac{7}{2}x(\ln|x|-1)+C$

18. انتیگرال $\int_1^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right)dy$ مساوی است به:

1) 4
2) $\frac{\pi}{4}$
3) $\frac{\pi}{8}$
4) 1

19. نتیگرال $\int_0^2 3^x dx$ مساوی است به:

1) $\frac{9}{\ln 3}$
2) $\frac{11}{\ln 3}$
3) $\frac{10}{\ln 3}$
4) $\frac{8}{\ln 3}$

20. $\int_{\frac{4\pi}{8\sqrt{10}}}^{\frac{\pi}{\sqrt{40}}} dx$ مساوی است به:

1) 0
2) 1
3) -1
4) $\pi/\sqrt{40}$

21. حاصل انتیگرال $\int_1^0 e^{-x}dx+\int_0^1 e^{-x}dx$ مساوی است به:

1) 1
2) 0
3) e^{-1}
4) $2e^{-1}$

22. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx$ مساوی است به:

1) $\frac{183}{9}$
2) $\frac{184}{9}$
3) $\frac{182}{9}$
4) $\frac{180}{9}$

.23 حاصل $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$ مساوی است به:

1) $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{5}{8}$ 3) $\frac{7}{8}$ 4) $\frac{9}{8}$

.24 اگر $\int_{8}^{12} f(x)dx = 7$ و $\int_{0}^{8} f(x)dx = 9$ باشد، پس $\int_{0}^{12} f(x)dx$ مساوی است به:

1) 18 2) 16 3) 17 4) 14

.25 $\int_{0}^{2}\frac{dx}{(3-2x)^2}$ مساوی است به:

1) $x=\frac{1}{3}$ 2) $x=\frac{1}{2}$ 3) $x=\frac{1}{5}$ 4) $x=-\frac{2}{3}$

.26 مساحت سطح محصور شده توسط دو منحنی

$f(x) = -x^2+4x+2$ و $g(x) = x^2-2x+2$ مساوی است به:

1) 16 2) 9 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{5}$

.27 $\int_{e}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)}{\cos 2x}dx$ مساوی است به:

1) $-\pi$ 2) $-\frac{\pi}{2}$ 3) 2μ 4) 0

.28 مساحت محصور شده توسط منحنی $y=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}x^2$ و محور x مساوی است به:

1) $\frac{4}{15}$ 2) $\frac{6}{15}$ 3) $\frac{15}{4}$ 4) $\frac{15}{6}$

29. اگر سطحی توسط دو منحنی $y_1 = y_1(x)$ و $y_2 = y_2(x)$ محصور شده باشد طوریکه $y_1 > y_2$ باشد، مساحت سطح مذکور از کدام رابطه دریافت می گردد؟

1) $A = \int_a^b (y_1 + y_2)dx$ 2) $A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

3) $A = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$ 4) $A = \int_a^b (y_2 - y_1)dx$

30. مساحت بین منحنی $y = \sin x$ و محور x و خطوط $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}$ عبارت است از:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) 2 4) $\frac{1}{2}$

31. مساحت سطحی که به منحنی $y = \frac{(x+1)^2}{4}$ در انتروال $[0,1]$ و بین محور x واقع است، مساوی است به:

1) $\frac{7}{12}$ 2) 12 3) $\frac{5}{12}$ 4) $\frac{1}{12}$

32. مساحت سطحی که به منحنی $y = \frac{(x+1)^2}{4}$ در انتروال $[0,1]$ و بین محور x واقع است، مساوی است به:

1) $\frac{7}{12}$ 2) 12 3) $\frac{5}{12}$ 4) $\frac{1}{12}$

33. حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی $y = \sqrt{x}$ و خط $y = 2$ حول محور y به دست می آید مساوی است به:

1) $\frac{32}{5}\pi$ 2) $\frac{1}{3}\pi$ 3) $\frac{5}{3}\pi$ 4) $\frac{2}{3}\pi$

34. حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی $y = x^3$ و خط $y = 1$ حول محور y بدست می آید مساوی است به:

1) $\frac{3\pi}{5}$ 2) $\frac{3\pi}{10}$ 3) $\frac{3\pi}{15}$ 4) $\frac{3\pi}{4}$

35. حجم جسمی را که از دوران منحنی $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$ و خط $y = 1$ به حول محور y به دست می آید عبارت است از:

1) $\frac{2\pi}{3}$ 2) $\frac{3\pi}{2}$ 3) $\frac{2\pi}{5}$ 4) $\frac{5\pi}{2}$

36. حجم جسمی که از دوران منحنی $y = \left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)^2$ و خط $y = 1$ به حول محور y تشکیل می شود مساوی است به:

1) 2π 2) 3π 3) 5π 4) 4π

37. حجم جسم از دوران سطح تحت منحنی $y = \sin x$ در انتروال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ حول محور x عبارت است از:

1) $\frac{\pi^2}{4}$ 2) $\frac{\pi^2}{8}$ 3) $\frac{\pi^2}{2}$ 4) π^2

38. طول قوس تابع $x = \sqrt{3}y + 5$ در انتروال $[9,10]$ مساوی است به:

1) 2 2) 4 3) 3 4) 1

39. تغییرات متوسط تابع $f(x) = 10x^2 + 10$ در انتروال $[2,5]$ مساوی است به:

1) 72 2) 70 3) 80 4) 90

40. تغییرات متوسط تابع $f(x) = 100x + 100$ در انتروال $[1,2]$ مساوی است به:

1) 150 2) 100 3) 300 4) 1401

.41 انتیگرال $\int \sin^3 x\, dx$ عبارت از:

1) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ 2) $-\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c$

3) $\cos x + \frac{1}{3}\sin^3 x + c$ 4) $\cos x - \sin^3 x + c$

.42 انتیگرال $\int \cos^2 x\, dx$ عبارت از:

1) $\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}x + c$ 2) $\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$

3) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + c$ 4) $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x + c$

.43 هرگاه $\int x^2 \cdot f(x)dx = x^5 + 8x^3$ داده شده باشد قیمت $f'(1)$ عبارت از:

1) 5 2) 8 3) 10 4) 12

.44 قیمت $\frac{d}{dx}\int (3^x + \ln x)dx$ عبارت از:

1) $3^x - \ln x$ 2) $3^x + \ln x$ 3) $3x - \ln x$ 4) $3x + \ln x$

.45 حاصل $\int [f(x)]^2 \cdot f'(x)dx$ عبارت از:

1) $[f(x)]^3 + c$ 2) $\frac{1}{2}[f(x)]^3 + c$

3) $\frac{1}{3}[f(x)]^3 + c$ 4) $\frac{1}{4}[f(x)]^3 + c$

.46 هرگاه $F(x) = \int (x^2-1)e^{x^3-3x}dx$ و $F(\sqrt{3}) = 3$ باشد، در این صورت تابع $F(x)$ عبارت از:

1) $e^{x^2-3x} + \frac{3}{4}$ 2) $\frac{1}{3}e^{x^3-3x} + \frac{8}{3}$

3) $(x^2-1)e^{x^2-1} + \frac{9}{4}$ 4) $\frac{1}{3}e^{x^3-3x} + \frac{11}{3}$

.47 هرگاه $f(x)=\frac{2x}{x^2+5}$ و $f(1)=\frac{1}{3}$ و $\int d\left(\frac{2x}{x^2+5}\right)=\frac{3}{7}$ باشد، قیمت x $\sum$ عبارت از:

1) 4 2) $\frac{13}{3}$ 3) $\frac{14}{3}$ 4) 5

.48 هرگاه $\int f(2x+1)dx=3x^2-4x+5$ داده شده باشد، در این صورت $f(5)$ عبارت از:

1) 6 2) 7 3) 8 4) 10

.49 هرگاه $f(x)=\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx$ داده شده باشد، در این صورت $f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ عبارت از:

1) 3 2) 2 3) 1 4) 0

.50 قیمت عددی انتیگرال معین $\int_{-4}^{1}|x+2|dx$ عبارت از:

1) $\frac{5}{2}$ 2) $\frac{7}{2}$ 3) $\frac{9}{2}$ 4) $\frac{13}{2}$

.51 قیمت عددی انتیگرال معین $\int_{-3}^{3}|x^2-4|dx$ عبارت از:

1) $\frac{46}{3}$ 2) $\frac{44}{3}$ 3) $\frac{38}{3}$ 4) $\frac{29}{3}$

.52 هرگاه $f(x)\begin{cases}x^{-1}, & x<e\\ x, & x\geq e\end{cases}$ داده شده باشد، در این صورت $\int_{1}^{3}f(x)dx$ عبارت از:

1) $\ln 3$ 2) $\ln 3+\frac{9}{2}$ 3) $\frac{1}{2}-e$ 4) $11-\frac{e^2}{2}$

.53 قیمت a در انتیگرال معین $\int_{0}^{1}(x^2+4x+a)dx=\frac{1}{3}$ عبارت از:

1) -3 2) -2 3) 2 4) 3

.54 هرگاه $\int_{2}^{16}f(x)dx=20$ و $\int_{6}^{16}f(x)dx=8$ باشد در این صورت $\int_{6}^{2}f(x)dx$ عبارت از:

1) -6 2) -12 3) 6 4) 12

.55 قیمت عددی انتیگرال معین $\int_{0}^{4}x^2\cdot\operatorname{sgn}(2x)dx$ عبارت از:

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{10}{3}$ 3) $\frac{64}{3}$ 4) $\frac{37}{3}$

فصل چهاردهم

احصائیه

روش جمع آوری معلومات:

وقت که برای جمع آوری اطلاعات ، سوال می کنید ، سوال می کنید ، سوال را میتوان به شکل شفاهی یا کتبی بپرسید. برخی اوقات بهتر است سوال نکینم در این مورد به مشاهده آن بپردازیم تا اطلاعات بهتر به دست آوریم و بعضی اوقات باید آزمایشی را انجام داد تا اطلاعات را جمع آوری نماییم.

مثال:

1. اگر بخواهیم در آمد یک خانواده را بدانیم ، از چه روش بهتر است اطلاعات را جمع آوری نماییم یا از اطلاعاتی که از قبل ثبت شده ، استفاده نماییم؟

جواب: هرگاه در آمد کم باشد ، ممکن است شاگردان خوش نداشته باشد که معلومات دهد ، پس بهتر است بدون نام ازآنها بپرسیم.

2. اگر بخواهیم نمره ریاضی شاگردان صنف ششم را بدانم ، از چه روش بهتر است اطلاعات را جمع نماییم؟

جواب: چون ممکن است شاگردان نمره واقعی خود را نگوید ، پس بهتر است از دفاتر ثبت شده استفاده نمایم.

③ اگر بخواهیم تعداد خواهران و برادران شاگردان را بدانم از چه روش اطلاعات را جمع آوری مینماییم؟

جواب: از پرسش شفاهی یا کتبی استفاده مینماییم.

④ اگر بخواهیم وزن نوزادان را بررسی کنیم ، از چه روش بهتر است اطلاعات را جمع آوری نماییم؟

جواب: باید وزن نوزادان را اندازه گیری نماییم.

- ✓ جمع آوری داده ها را اطلاعات می گویند.
- ✓ روش های جمع آوری اطلاعات عبارت اند از: پرسش (شفاهی ، مصاحبه) مشاهده و انجام آزمایش و یا استفاده از اطلاعات ثبت شده.
- ✓ جامعه احصائیوی یا به طور خلاصه جامعه ، مجموعه یی از افراد و اشیای است که در بارهٔ اعضای آن اطلاعات مورد نیاز را دریافت می کنیم.

جامعه و نمونه:

در یک بررسی ، مجموعه همه افراد و یا اشیا که از آن ها اطلاعات مورد نیاز را دریافت می کنیم جامعه می نامیم. هرگاه اطلاعات از همه اعضای جامعه به دست آوریم ، این عمل را رأی پرسی همگانی می گویند. برخی اوقات به دلیل مشکلات چون کمبود وقت ، مشکلات اقتصادی ، امکان نداشتن دسترسی به همه افراد جامعه مجبور هستیم فقط اطلاعات بخشی از اعضای جامعه را به دست آوریم.

نمونه بخشی از جامعه است ، یک نمونه از جامعه باید خاصیت و صفات کل جامعه را داشته باشد.

- ✓ بخشی از جامعه را نمونه می گویند.
- • تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامند.
- ✓ به خاطر شناخت جامعه ، نمونه یی را که از آن جامعه انتخاب می کنیم ، باید نمونه تصادفی باشد روش انتخاب نمونه به گونه یی باشد که:
  - ○ انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان پذیر باشد.
  - ○ پیش از انتخاب یک نمونه باید نتوانیم دربارهٔ مشخصات آن قضاوت کنیم.

مثال های از جامعه و موضوع مورد بررسی آن ها:

جامعه	موضوع مورد بررسی
➢ سابقه تدریس معلمان در هرات	معلمان ولایت هرات
➢ محصول پنبه سمت شمال	میزان تولید پنبه
➢ محصول زراعتی افغانستان	انواع محصولات افغانستان

مثال های از نمونه:

- ❖ یک مثلث برنج ، نمونه یی از یک بوجی برنج است.
- ❖ شاگردان صنف هفتم مکتب شما نمونه یی از شاگردان صنف هفتم افغانستان است.
- ❖ معلمان ریاضی کندز نمونه یی از معلمان کندز است.
- ❖ گندم نمونه یی از محصولات زراعتی افغانستان است.

نمونه تصادفی:

برای آن که یک نمونه ، نشان دهندۀ یک جامعه و دارای خصوصیات جامعه باشد باید خصوصیات ذیل را داشته باشد.

1. امکان انتخاب هر فرد و یا شی به عنوان عضوی از نمونه امکان پذیر باشد.
2. قبل از انتخاب نمونه نتوانیم در بارۀ اعضای نمونه قضاوت کنیم.
3. تمام اعضای جامعه به عنوان یک نمونه سهم برابر داشته باشد.

مثال: کدام یک از نمونه های ذیل یک نمونه تصادفی است.

موضوع: بررسی سواد اهالی شهر

جامعه: اهالی شهر

نمونه اول: آن فرد که ساعت 5 بعد از ظهر از سرک عبور کند؟

جواب: این یک نمونه تصادفی است زیرا از قبل سواد فردی را که از سرک می گذرد نمی توان پیش بینی کرد.

نمونه دوم: دکتوران یک شفاخانه؟

جواب: این یک نمونه غیر تصادفی است زیرا از قبل می توان نتیجه را پیش بینی کرد و این نمونه نشان دهنده همه جامعه نیست.

متحول تصادفی و انواع آن:

اگر اطلاعات جمع آوری شده از موضوع مورد مطالعه از یک عضو جامعه به عضو دیگر قابل پیش بینی نباشد موضوع را متحول تصادفی می نامیم.

این دسته از متحول ها را بنام متحول کمی یا عددی می نامیم ، هرگاه در متحول کمی نتوانیم بین دو واحد پشت سر هم ، عددی پیدا کنیم آن را کمی مجزا می نامیم. اگر بین دو واحد پشت سر هم بتوانیم عددی را پیدا نماییم آن را کمی پیوسته می نامیم. در صورت که اطلاعات را توصیف و بدون عدد بیان کنیم متحول کیفی یا توصیفی می نامیم.

- ✓ اطلاعات جمع آوری شده از یک موضوع را متحول های تصادفی می گویند.

متحول های تصادفی دو نوع است.

- ❖ کمی یا عددی که قابل اندازه گیری باشد.
- ❖ کیفی یا غیر عددی که قابل اندازه گیری نمی باشد.

متحول های کمی دو نوع است.

A. پیوسته: که بین هر دو مقدار آن میتوان مقدار دیگر را دریافت کرد.

B. مجزا: که پیوسته نباشد.

مثال:

متحول تصادفی با شمارش	متحول تصادفی با اندازه گیری	متحول تصادفی با توصیف
کمی مجزا	کمی پیوسته	کیفی
① تعداد اعضای خانواده	① طول قد شاگردان	① رنگ چشم شاگردان
② تعداد صنف های مکتب	② درجه حرارت شهر شما	② میزان سواد کارگران
③ تعداد موتر های که از سرک می گذرد	③ وزن گوسفندان	③ موسیقی مورد علاقه مردم

جدول کثرت $\boldsymbol{Frequency\ Table}$:

در یک بررسی ، داتا های جمع آوری شده را که روی آن هیچ عمل انجام نشده باشد ، داتای خام می نامند. در هر بررسی با منظم کردن داتاها جدولی تشکیل نموده که آن را جدول کثرت می نامیم. برخی اوقات یک جدول را به شکل سطری ترتیب نموده و مقدار دفعات را که یک داتا تکرار شده است ، کثرت آن داتا می نامیم.

مجموع کثرت داتاها در یک نمونه برابر با کل داتاها یا تعداد اعضای نمونه می باشد، اگر f_1 کثرت داتای اول ، f_2 کثرت داتای دوم .... f_n کثرت داتای n—ام و تعداد کل داتاها مساوی به n باشد پس:

$$n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

اطلاعات جمع آوری شده را داتا $Data$ می گویم.

- ✓ اگر $x_1 , x_2 , \dots \dots , x_n$ تعداد داده های یک موضوع باشد ، تعداد دفعاتی که یک داده تکرار می شود ، به نام کثرت آن داده ها می گویند ، و معمولاً آن را به $f_1 , f_2 , \dots \dots , f_n$ نشان می دهند.

مثال:

تعداد اعضای خانواده	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموع
تعداد خانواده	4	7	9	8	6	3	2	1	40

جدول بالا نشان می دهد که تعداد 6 خانواده 5 نفر عضو داشته و تعداد یک خانواده 8 نفر عضو دارد.

گراف تصویری:

گاهی برای دانستن اطلاعات داده شده از سمبول ها و اشکال استفاده مینماییم ، این روش را به نام گراف تصویری می گویند. در صورت که کثرت داده ها زیاد باشد ، از مقیاس استفاده مینماییم.

مـــــــــــد $Mode$:

داتایی که بیشترین کثرت را دارد $Mode$ می نامیم که میتوان در موضوعات رأی گیری ها ، فروش کالا و غیر استفاده نمود.

اوســـط $Mean$:

اوسط داده ها را میتوان از تقسیم حاصل جمع داده ها بر تعداد داده ها پیدا کرد.

$$\bar{X} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}$$

جدول کثرت داتا های گسسته:

بعضی اوقات وقت تعداد داتاها زیاد یا کثرت بسیاری از داتاها صفر یا عدد کم باشد ، جدول کثرت مجزا کمک زیادی ننموده ، یا تشکیل آن خیلی مشکل است ، بنابرین در این حالت از جدول کثرت به شکل دسته بندی استفاده می کنیم، کثرت هر دسته نشان می دهند که در دسته چند داتا وجود دارد ، ولی نمیتوانیم بگوییم آن داتا ها کدام اند.

خواص و اجزای جدول کثرت:

کم ترین مقدار که میتواند در یک دسته قرار گیرد ، سرحد پائینی و بیشترین مقدار را که میتوان در یک دسته قرار گیرد ، سرحد بالایی می نامیم. تعداد داتا های که می تواند در یک دسته قرار گیرد به نام طول دسته ، نامگذاری نموده اند، برای پیدا کردن طول دسته کافی است تفاوت بین دو سرحد بالایی دو دسته متواتر را دریافت مینماییم.

کثرت تجمعی:

مجموع کثرت مطلق هر دسته و کثرت دسته های قبل از آن را کثرت تجمعی آن دسته می نامند، و کثرت آخرین دسته برابر است با تعداد کل داتا ها.

یادداشت:

- برای یکسان نشان دادن هر دسته از عددی که اوسط هر دسته است استفاده می نماییم.
- تکرار هر داتا را کثرت مطلق آن داتا در جدول کثرت می گوییم.
- در هر دسته بندی داتا ها تمام داتاهای واقع در یک دسته را برابر مرکز آن دسته در نظر می گیریم.
- مرکز دسته ها به تعداد اعضای که در آن دسته قرار دارند تکرار می شود یعنی کثرت مرکز دسته ها برابر تعداد اعضای است که در آن دسته قرار گرفته و این کثرت را کثرت مطلق آن دسته می گوییم.

کثرت نسبی:

در بعضی حالات برای مقایسه دو وضعیت نمیتوان کثرت های مطلق را به هم مقایسه کرد. در چنین حالت از $\frac{\text{کثرت مطلق}}{\text{کثرت کل داتا}}$ استفاده مینماییم. مقدار این نسبت را کثرت نسبی می گوییم. برای مقایسه بهتر ، این عدد را با فیصدی نشان می دهیم و فیصد کثرت نسبی می نامیم.

$Note$:

1. آن دسته که $Data$ معلوم نمی شود و یا هم کثرت مطلق ندارد قیمت کثرت نسبی مساوی به صفر است.
2. به هر دسته (طبقه) مجموع تمام کثرت نسبی در یک دسته یا طبقه مساوی به یک است.
3. قیمت کثرت نسبی یک طبقه همیشه مساوی به یک عدد مثبت که از 1 کوچک است میگردد.

گراف میله ای (گراف نواری):

یک گراف میله یی باید دارای عنوان ، مقیاس و مشخصه محور باشد ، در گراف میله یی محل قرار گرفتن داتاها مهم نیست ، طول میله ها نشان دهندۀ کثرت داتاها می باشد. از گراف میله یی بیشتر برای ترسیم متحول مجزا و کیفی استفاده می کند ، در ترسیم گراف میله یی ترتیب قرار گرفتن میله ها اهمیت ندارد ، آن چه که در این گراف مهم است ، کثرت داتاها است.

گراف خط منکسر:

اگر اطلاعات جمع آوری شده را توسط نقاط در مستوی مختصات ترسیم نموده و این نقاط را به کمک خطوط منکسر با هم وصل نماییم ، گراف که توسط نقاط وصل شده به دست می آید به نام گراف خط منکسر یاد می شود.

اوسط داتاهای گسسته با کثرت:

برای پیدا کردن اوسط داتاها در صورت تکرار داتاها میتوان به جای جمع داتاها از ضرب کثرت در داتاها استفاده نمود اگر در حالت کل یک داتا را به X و کثرت آن به f نشان دهیم ، این حاصل ضرب برابر $f\,.\,x$ خواهد بود. اگر داتا اول و کثرت آن را به x_1 و f_1 ، داتا دوم و کثرت آن را به x_2 و f_2 .... داتا آخر را به x_n و کثرت آن را به f_n نشان دهیم ، اوسط داتا ها عبارت است از:

$$\bar{X}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

اوسط داتاهای پیوسته:

در داتاهای پیوسته ، مرکز دسته ها را در کثرت های آن ضرب و با هم جمع کرده و پس از آن بر مجموع کثرت (که همان تعداد داتاها است) تقسیم کرد.

$$\bar{X}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

روش دسته بندی داتاها:

برای دسته بندی داتاها مراحل زیرا به ترتیب انجام می دهیم.

1. وسعت بیشترین مقدار و کم ترین مقدار داتاها را به دست آورید.
2. این وسعت را بر تعداد دسته ها تقسیم و طول دسته را به دست آورید در صورت که حاصل عددی طبیعی نباشد ، میتوان آن را به بالا گرد $(Round\ Off)$ کرد.
3. دسته ها را به این مقدار تشکیل دهید.

مراحل دسته بندی داتا:

A. ساحه تحول: وسعت بین بیشترین و کمترین داتا.

B. طول دسته: نسبت ساحه تحول بر تعداد دسته ها.

C. کثرت دسته: تعداد داتاهایی که در هر دسته قرار دارد.

D. کثرت دسته: محاسبه وسط هر دسته.

دسته بندی داتاهای پیوسته:

در دسته بندی اگر متحول ها پیوسته باشد ، سرحد بالایی دسته بعدی برابر سرحد پایانی دسته قبلی است. در صورتیکه داتا برابر به سرحد بالایی دسته باشد آن داتا متعلق به دسته بعدی می باشد.

اوسط وزنی:

اگر داتاها با ضریب خاص بیان شده باشند ، به این معنا است که تأثیر داتاها یکسان نبوده ، بسته گی به ضریب آن دارد ، در این حالت در جدول کثرت ضریب ها به عنوان کثرت آن داتا به حساب آمده و به w نشان داده می شوند ، اوسط به دست آمده در این حالت را اوسط وزنی می نامیم.

$$\text{اوسط وزنی} = \bar{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$$

داتا ها	x_1	x_2	$\cdots\cdots\cdots$	x_n
ضریب (وزن)	w_1	w_2	$\cdots\cdots\cdots$	w_n

گراف مستطیلی $Histogram$:

در نمایش داتاهای پیوسته ، از گراف مستطیلی استفاده می کنیم، در این گراف عرض مستطیل ها برابر طول دسته ها است در گراف مستطیلی ، مساحت های مستطیل نشان دهنده کثرت هر دسته بوده ، و با یکدیگر خوبتر مقایسه می شوند، مساحت مستطیل ها کثرت دسته ها را نشان می دهند. اگر طول دسته ها با هم برابر باشند ، میتوان عوض مساحت ها کثرت را مستقیماً مقایسه نماییم ، در این وضعیت محور عمودی کثرت را نشان می دهد.

- هستوگرام یا گراف مستطیلی عبارت از گراف است که در آن توزیع کثرت توسط مستطیل ها نشان داده می شود. عرض مستطیل یا قاعده مستطیل برابر به طول دسته و طول مستطیل یا ارتفاع مستطیل برابر به کثرت دسته است. مساحت هر مستطیل برابر به حاصل ضرب طول دسته و کثرت دسته می باشد ، در گراف مستطیلی ، مستطیل ها با هم پیوسته و از متحولین پیوسته برای نشان دادن گراف استفاده می شود.

گراف دایره یی:

نشان دادن داتاها به کمک دایره را بنام گراف دایره یی میگویند. درگراف دایره یی ابتدا نسبت کثرت هر دسته را بر تعداد کل داتاها تقسیم و ضرب در $360°$ که زاویه مرکزی همان دسته را نشان می دهد، مینماییم.

$$\text{درجه}\ \ \text{کثرت بر حسب} = \frac{\text{کثرت داتاها}}{\text{تعداد کل داتاها}} \cdot 360°$$

- دایره یی را به شعاع اختیاری به وسیله زاویه مرکزی به n قسمت تقسیم می کنیم به قسم که اندازه زاویه مرکزی هر یک از این قسمت ها متناسب به کثرت آن قسمت باشد، در این صورت زاویه مرکزی نظر به دسته اول عبارت است از:

$$\text{درجه}\ \ \text{کثرت بر حسب} = \frac{\text{کثرت داتاها}}{\text{تعداد کل داتاها}} \cdot 360°$$

میانه $Median$:

پس از مرتب کردن داده ها مقداری را که تعداد داتاهای بعد از آن با تعداد داتاهای قبل از آن برابر باشد میانه می گوییم. اگر تعداد داتاها تاق باشد ، میانه خود یکی از داتاهای مابینی است ، ولی اگر تعداد داتا جفت باشد ، میانه وسط دو داتا مابینی است.

ساحه تحول $Range$:

طول فاصله یی که متحول در آن امکان تغییر را دارد ، به نام ساحه تحول یاد می کند. این معیار ، وسعت بین بیشترین و کم ترین داتا را نشان می دهد ، متوجه باید بود که بزرگی ساحه تحول نشان دهنده فرق یا پراگنده گی زیاد در جامعه است ، هر اندازه این فرق کم تر باشد پراگندگی افراد کم تر است. افراد جامعه از لحاظ این خصوصیت به هم نزدیکتر اند ، اگر ساحه تحول صفر باشد ، خصوصیت مورد بررسی همه افراد با هم برابر و یکسان اند در آن حالت جامعه را یک جامعه متجانس می نامیم.

- ✓ ساحه تحول عبارت از تفاوت کوچکترین داتا از بزرگترین داتا در مجموع داتاها می باشد یا به عبارهٔ دیگر ساحه تحول عبارت است از طول فاصله است که متحول در آن ساحه تغییر مینماید.

اوسط انحراف $Average\ deriation$:

وسعت که بین داتاها و اوسط موجود است آن را انحراف از اوسط می گویند. مجموع انحراف از اوسط داتاها همیشه صفر است ، به این دلیل برای بررسی داتاها از قیمت مطلقه انحراف ها استفاده می کنیم. اگر قیمت مطلق همه انحراف ها را جمع نموده و تقسیم بر تعداد داتاها نماییم اوسط انحراف گفته می شود.

$$\text{اوسط انحراف} = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\cdots+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

هر چه انحراف اوسط عدد بزرگتر باشد ، به همان اندازه پراگندگی داتاها از اوسط بیشتر است.

- ✓ تفاضل اوسط از هر داتا را انحراف از اوسط گویند.

گراف چند ضلعی کثرت:

در گراف چند ضلعی ، مرکز هر دسته روی محور افقی و کثرت مطلق یا کثرت نسبی هر یک از دسته ها روی محور عمودی نشان داده می شود. متقابل با مرکز هر دسته و کثرت آن یک نقطه در مستوی مشخص میگردد که عرض آن مرکز دسته و طول آن برابر با کثرت آن دسته است. به تعداد دسته های جدول در مستوی سیستم مختصات نقطه به وجود می آید. اگر به نقاط مذکور دو نقطه اختیاری دیگر $(x_1 - c, 0)$ و $(x_n + c\ ,0)$ را در اول و آخر دسته ها اضافه کنیم ، طوریکه c وسعت هر صنف (سرحد بالایی منفی سرحد پائینی صنف) است از اتصال این نقاط به یکدیگر ، یک گراف حاصل می شود که آن را گراف چند ضلعی کثرت می نامند.

- ✓ هر یک از راس های گراف چند ضلعی کثرت در نقاط مابینی ضلع بالایی یک مستطیل مربوطه به جدول کثرت مورد مطالعه قرار دارد.
- ✓ مساحت سطح زیر گراف چند ضلعی کثرت و مساحت گراف مستطیلی با هم برابر است.
- ✓ گراف چند ضلعی کثرت نسبی بیش تر برای دیتا $Data$ پیوسته یا متصل به کار می رود.
- ✓ جوره های مرتب نقاطی را که عرض آن ها مرکز دسته ها و طول آن ها برابر کثرت همان دسته باشد با هم وصل می کنیم گراف چند ضلعی کثرت به وجود می آید ، در گراف چند ضلعی کثرت دو نقطه با کثرت صفر به ابتدأ و انتهای دسته ها اضافه می شود تا گراف چند ضلعی کثرت به محور x متصل شود.

گراف ساقه و برگ:

برای رسم گراف ساقه و برگ از اعداد استفاده می شود. دیتای احصائیوی را به صورت اعداد در آورده و پس از این اعداد گراف ساقه و برگ را تشکیل می دهیم. این گراف برای دیتای که تفاوت کوچکترین و بزرگترین دیتا از نظر تعداد رقم ها اندک باشد ، مناسب است.

مثلاً: در عدد 37 ، عدد 3 ساقه و 7 برگ می باشد. به خاطر نمایش گراف ساقه و برگ عدد 8.3 را به صورت 083 عدد 11.2 را به صورت 112 و 12 را به صورت 120 می نویسیم.

چارک ها:

عددی که جامعهٔ مرتب را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند ، میانه نامیده می شود. حال اعدادی را در نظر بگیرید که جامعه مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند. این اعداد را با Q_1 ، Q_2 و Q_3 نشان می دهند و آن ها را به ترتیب چارک های اول تا سوم می نامند، واضع است که Q_2 میانه است.

✓ اعداد که دیتای مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند آن ها را چارک های اول ، دوم و سوم می نامند ، و به Q_1 ، Q_2 و Q_3 نشان می دهند.

- چارک اول مقداری است که 25% دیتای جامعه پائین تر آن و 75% بالاتر از آن قرار می گیرد.
- چارک دوم مقداری است که 50% دیتای جامعه پائین تر از آن و 50% دیتا بالاتر از آن قرار می گیرد.
- چارک سوم مقداری است که 75% دیتای جامعه پائین تر از آن و 25% دیتا بالاتر از آن واقع است.
- اگر دیتا را به صورت صعودی مرتب کنیم میانه دیتا مساوی به Q_2 و میانه نیمه اول دیتا مساوی به Q_1 و میانه دوم دیتا مساوی به Q_3 است.

محاسبه چارک ها:

1. دیتای مرتب شده را از 1 تا n شماره گذاری مینماییم.
2. محل $P-$ام $(P = 1,2,3)$ را با استفاده از رابطه ذیل به دست می آوریم.

$$C_{QP} = \frac{P.n}{4} + \frac{1}{2}$$

3. با استفاده از محل چارک ، مقدار چارک ها را تعیین مینماییم.

گراف صندوقچه یی:

گراف تصویری است که پراگندگی دیتا را نسبت به گراف های دیگر بهتر نشان می دهد. این گراف دیتا را بر اساس مقادیر ذیل نمایش می دهند.

① کمترین دیتا ② چارک اول ③ میانه

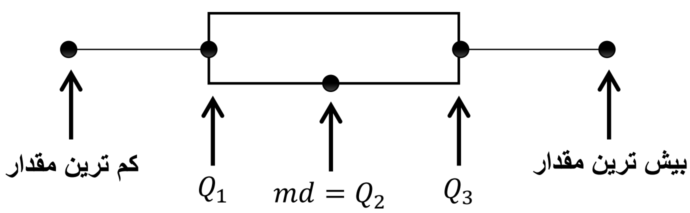
④ چارک سوم ⑤ بیش ترین دیتا

گراف صندوقچه یی نشان دهندهٔ چارک ها ، حد اقل و حد اکثر دیتا است.

مراحل تهیه گراف صندوقچه یی:

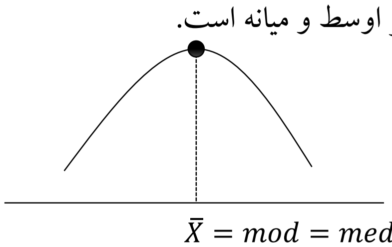
① کوچکترین دیتا ② بیش ترین دیتا ③ میانه

④ چارک اول ⑤ چارک سوم ⑥ ترسیم گراف



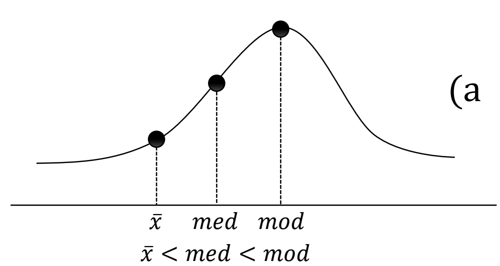
مقایسه شاخص های مرکزی توسط منحنی نارمل:

اگر منحنی نارمل متناظر باشد ، در این صورت موقعیت میانه و اوسط در منحنی نارمل یکسان می باشد، و چون منحنی نارمل نقطه اعظمی دارد ، بنابر این موقعیت مـــود آن نیز ، برابر اوسط و میانه است.

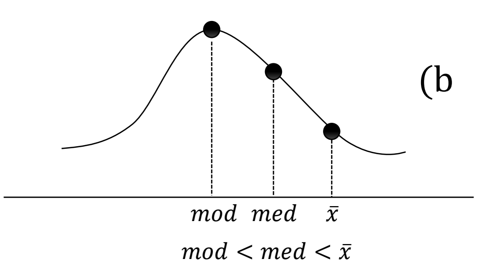


اگر منحنی نارمل متناظر نباشد در این صورت داریم که:

(a



(b



اگر اوسط و میانه مساوی باشد ، تعداد دیتای که قبل و بعد از اوسط و میانه قرار دارند مساوی باشند، اگر اوسط در سمت چپ میانه واقع باشد ، تعداد دیتای که در سمت راست اوسط قرار دارند، بیشتر از تعداد دیتای اند که در سمت چپ اوسط قرار دارند. مانند شکل (a) .

اگر اوسط در سمت راست میانه واقع باشد، تعداد دیتای که در سمت راست اوسط قرار دارند کمتر از تعداد دیتای اند که در سمت چپ اوسط قرار گرفته. مانند شکل (b) .

انحراف چارک ها :

ساحه تحول در بعضی مواقع به علت موجودیت دو مقدار خیلی کوچک و خیلی بزرگ در جامعه ممکن است تعبیر های نامناسب از جامعه را ارائه کند، بنابر این در همچو مواقع از شاخص دیگری به نام انحراف چارک ها که بتواند ساحه تحول جامعه را بهتر مشخص نماید استفاده مینماییم.

اگر Q_1 و Q_3 به ترتیب چارک اول و سوم مجموعه ای از دیتا باشند ، انحراف چارک ها را به Q نمایش داده و قرار ذیل تعریف می کند.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

انحراف چارک ها یکی از شاخص های نشان دهندهٔ پراگندگی دیتا است ، زیرا از روی تعریف چارک اول و سوم بر می آید که 50% جامعه در فاصله $Q_3 - Q_1$ قرار دارند ، هر مقدار این فاصله کوچکتر باشد، دیتا جمع تر و به عبارت دیگر پراگندگی آن کم تر است.

گاهی انحراف چارک ها را به صورت $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ نیز تعریف می کند، و آن را نیم چارک می نامند.

واریانس $Variance$:

شاخص های پراگندگی ، اندازه هایی هستند که وضع پراگندگی دیتا را نسبت به یکدیگر و نسبت به اوسط مشخص می کنند. واریانس یکی از مهم ترین شاخص های پراگندگی است که با S^2 نشان داده می شود و از رابطه ذیل به دست می آید.

$$S^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$$

محاسبه واریانس از جدول کثرت توسط فورمول $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ به دست می آید.

x_i : مرکز دسته ها

مراحل محاسبه واریانس:

① اوسط دیتا را دریافت می نماییم. $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

② مجموع مربع های انحراف ها یعنی: $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2$

③ مجموع فوق را بر تعداد اعضای مجموعه ، n تقسیم نموده و مساوی به S^2 نشان می دهیم. $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}$

برخی اوقات برای محاسبه واریانس از فورمول ذیل نیز استفاده مینماییم. $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}{n}-\bar{x}^2$

انحراف معیاری:

جذر مربع واریانس را به S نشان می دهند و آن را انحراف معیاری می گویند. $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}}$

محاسبه انحراف معیاری از جدول کثرت توسط فورمول ذیل به دست می آید. $S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$

ضریب تغییرات $Coefficient\ Variations$:

ضریب تغییرات یا پراگندگی نسبی موارد استعمال زیاد دارد که واریانس و انحراف معیاری فاقد آن ها است. یکی از کاربرد های آن مقایسه نمودن دو جامعه احصائیوی نا متجانس و نا همگون است. ضریب تغییرات که به سمبول CV نشان داده می شود ، عبارت از خارج قسمت انحراف معیاری بر اوسط که عدد مطلق (بدون واحد) است .

یعنی:

$$\text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیاری}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad CV = \frac{S}{\bar{X}}$$

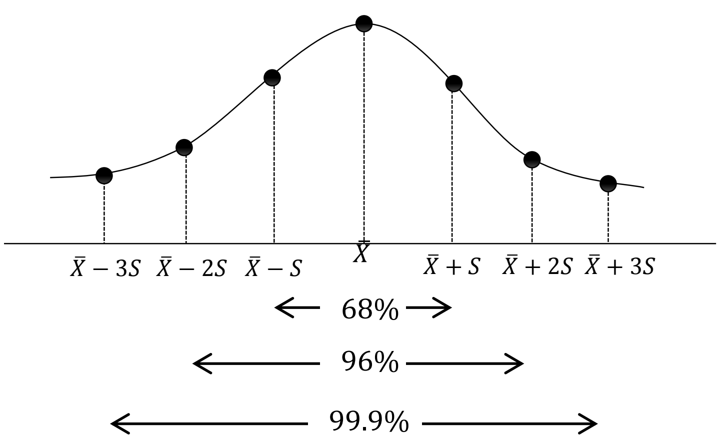
ضریب تغییرات را اکثراً به صورت فیصدی می نویسند. اگر ضریب تغییرات به 100 ضرب بشود ضریب تحول بدست می آید.

ضریب تحول $\quad CV\% = 100\ \frac{S}{\bar{X}}$

- ❖ ضریب تغییرات فقط برای $data$ مثبت تعریف می شود.
- ❖ اگر همه $data$ با هم برابر باشند ، ضریب تغییرات صفر است.
- ❖ اگر همه دیتا را در یک عدد مثبت ضرب کنیم ضریب تغییرات تغییر نمی کند.
- ❖ اگر به همه دیتا یک عدد مثبت را اضافه کنیم ، ضریب تغییرات جدید کوچکتر از ضریب تغییرات دیتا اولیه است.

پراگندگی در منحنی نورمال *Normal Curve*:

منحنی نورمال وسیله مهم برای توصیف از مجموع های آماری است. در توزیع نورمال در حالت که اداره ها دارای توزیعی نورمال و منحنی کثرت متناظر باشد ، واریانس نقشی عمده یی دارد. در واقع با مشخص بودن دو پارامتر اوسط و انحراف معیاری در توزیع نورمال ، این توزیع در کل مشخص خواهد بود و محاسبه هر نوع شاخص مساعد است.



شاخص های شکل توزیع نورمال:

شاخص های شکل توزیع را میتوان در دو حالت مطالعه نمود.

① شاخص خمیدگی $Skewness$:

توزیع که در اطراف اوسط متناظر نباشد خمیدگی گفته می شود این شاخص را توسط دو ضریب زیر نشان می دهند.

I. **ضریب خمیدگی:** شاخص است که برای تعیین میزان خمیدگی به کار می رود.

$$\alpha_3=\frac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^3}{S^3}$$

اگر $\alpha_3=0$ توزیع متناظر ، اگر $\alpha_3>0$ توزیع خمیدگی مثبت و اگر $\alpha_3<0$ توزیع دارای خمیدگی منفی است.

II. **ضریب خمیدگی پیرسون:** ضریب پیرسون به صورت زیر تعریف می شود.

$$Sk_{(P)}=\frac{3\left(\bar{x}-med\right)}{S}$$

در توزیع متناظر ضریب خمیدگی پیرسون برابر صفر است ، کمیت های مثبت و منفی ضریب خمیدگی پیرسون به ترتیب نشان دهنده خمیدگی مثبت و یا منفی توزیع است.

② شاخص کشیدگی $Kurtosis$:

شاخص کشیدگی نشان دهنده آن است که یک توزیع چه وقت دارای اوج و چه وقت دارای پخشی می باشد.
ضریب کشیدگی معمولترین شاخص است که برای اندازه گیری کشیدگی به کار رفته به صورت ذیل تعریف می گردد. $\alpha_4=\dfrac{\frac{1}{n}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^4}{S^4}$

در صورت جدول کثرت فورمول شاخص کشیدگی $\dfrac{\frac{1}{n}\sum f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^4}{S^4}$ است.

شاخص کشیدگی بستگی به موقعیت و پراگندگی توزیع ندارد ، این شاخص برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد.

جامعه های چند متحوله:

یکی از اهداف عمده در اکثر تحقیقات احصائیوی پیش بینی و پیش گویی نمودن و تعیین یک متحول از جنس متحول دیگر است، زمان که ارتباط بین دو شی را مورد بررسی قرار می دهیم منظور از جامعه دو متحوله می باشد. مانند رابطه بین حجم و فشار گاز ، ارتباط بین صحت و میزان مرگ و میر رابطه بین سطح کشت و مقدار محصول ، رابطه بین شعاع دایره و مساحت آن.

برای سهولت ، معمولاً ارتباط بین دو یا چندین متحول را به وسیله معادلات ریاضی ارائه می دارند. در قدم اول به منظور تشخیص و تشکیل معادلات مورد ضرورت معلومات لازم جمع آوری می گردد، در قدم دوم معلومات جمع آوری شده به شکل ارزش متحول های مورد مطالعه در یک مستوی مختصات قایم، نقطه گذاری می گردد، که از وصل این نقاط به دست می آید یک گراف را به ما می دهد.

گراف پراگندگی $Scater\ diagram$:

برای ترسیم نمودن گراف پراکنش (پراگندگی) داده ها را به صورت جوره های مرتب ارائه و توسط نقاط در یک مستوی محور های مختصات نمایش می دهیم.

گراف پراکنش می تواند سه نوع اطلاعات را در اختیار ما قرار دهد.

- نمونه یی که نشان دهندۀ نوعی ارتباط بین مشاهدات باشد موجود است یا نه؟
- در صورت موجودیت نوعی ارتباط آیا ارتباط خطی است یا غیر خطی؟
- در صورت که رابطه خطی باشد نوع ارتباط چگونه است؟

همبسته گی و ضریب همبسته گی:

همبسته گی به سنجش و دریافت درجه ارتباط بین متحول ها می باشد، ارتباط بین متحول ها می تواند به صورت خطی توسط یک خط مستقیم و یا به صورت غیر خطی به وسیله یک منحنی ارائه می گردد.

همبسته گی عموماً به دو صورت مثبت و منفی بین دو متحول بیان می شود، اگر اندازۀ دو متحول در یک جهت تغییر کند یعنی x و y هر دو بزرگ یا هر دو کوچک شوند همبسته گی مثبت (خط مستقیم) است.

بهترین معیاری تشخیص وجود همبسته گی یا عدم آن و حتی نوع ، جهت و میزان همبسته گی خط ، ضریب همبسته گی است که توسط فورمول ذیل ارائه می گردد.

$$r=\frac{\frac{1}{n}\sum xy-(\bar{x})(\bar{y})}{S_x\cdot S_y}$$

S_x : انحراف معیاری x

S_y : انحراف معیاری y

اگر نقاط به شکل یک خط مستقیم هر قدر که نزدیکتر باشد، خطای متحول y نظر به x کمتر است ، و برعکس هر قدر که از خط دورتر باشند، خطای y بیشتر است.

خط رگرسیون $Regression$:

رگرسیون (تخمین) ، سنجش و دریافت ارزش یک متحول تابع نظر به ارزش یک یا چند متحول مستقل می باشد. معادلهٔ که ارتباط بین متحول ها را افاده می نماید به نام معادله یی رگرسیون یا معادله سنجش یاد می شود و این معادله را میتوان به روش کمترین مربعات محاسبه و ضرایب a و b را به کمک این روش به صورت ذیل به دست آورد.

$$(y=ax+b)$$

r : ضریب همبسته گی

$$a=r\,\frac{S_y}{S_x}$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}$$

- ✓ بهترین خط مناسب خطی است که مجموع مربعات خط هایش از بقیه خطوط ممکن دیگر کمتر باشد، چنین خط (خط رگرسیون) می گویند.

مجموع توان های خط های دوم $=\sum(y-\bar{y})^2=\sum[y-(ax+b)]^2=\sum(y-b-ax)^2$

$$=(ax_1+b-y_1)^2+(ax_2+b-y_2)^2+\cdots$$

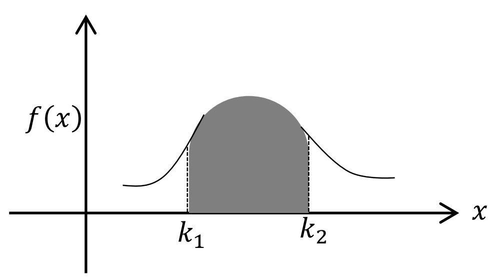
نتیجه: خط رگرسیون وسیله یا ابزاری است برای پیش بینی مقدار یک متحول بر حسب متحول دیگر که به آن وابسته است مورد استفاده قرار می گیرد.

توزیع تابع احتمال:

توزیع تابع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می گیرد عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن فضای نمونه و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی است.

- اگر $P(x = x_i) = f(x_i)$ داشته باشیم در این صورت جوره های مرتب $[x_1, f(x_1)]\ , [x_2, f(x_2)]\ , \dots \dots , [x_n, f(x_n)]$ را تابع احتمال مجزا (گسسته) می گویند.
- تابع احتمال پیوسته و تجمعی را میتوان به شکل $F(x) = P(x \le x)$ ارائه نمود.
- اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد در این صورت احتمال اینکه x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است به:

$$P(k_1 \le x \le k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$



- اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد در این صورت :

$$P(k_1 \le x \le k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

- اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت اوسط $Expected\ Value$ یک متحول تصادفی x که $E(x)$ نشان داده می شود برابر است به:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ اوسط x نامیده می شود که آن را به $\bar{x}$ نمایش می دهیم و همچنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت وریانس که به شکل S^2 نمایش داده می شود مساویست به:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E_{(xi)}\right]^2 f(x_i)$$

- ✓ فرق بین متحول تصادفی در احصائیه و احتمالات با متحول در الجبر این است که متحول احصائیه و احتمالات از فضای نمونه و متحول الجبر از اعداد حقیقی انتخاب می شود.
- ✓ متحول تصادفی اصطلاح است که به عنوان یک تابع در احصائیه و احتمالات مورد استفاده قرار می گیرد.

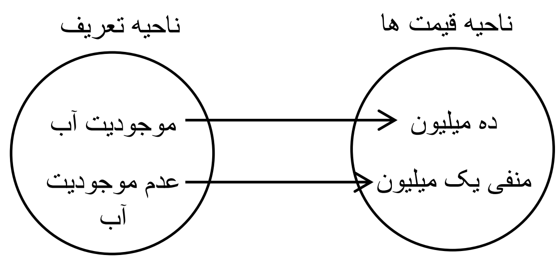
- ✓ تابع احتمال یک متحول تصادفی گسسته ، تابعی است که ناحیه تعریف آن اعدادیست که متحول تصادفی می تواند اختیار کند و ناحیه قیمت های آن شامل احتمال های مربوط به عناصر ناحیهٔ تعریف است.
- ✓ تابع احتمال تجمعی و پیوسته تابع است که ناحیه تعریف آن شامل آن اعدادیست که متحول تصادفی x اختیار می کند و ناحیه قیمت آن هم تصاویر $f(x)$ می باشد.

اوسط

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)=\bar{x}\cdots$$

$$V(x)=S^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x_i))^2\cdot f(x_i)\cdots$$

وریانس تصادفی گسسته



آزمایش برنولی و توزیع دو جمله یی:

توزیع احتمال دو جمله یی یک توزیع گسسته است که برای توصیف حوادث مختلف به کار می رود ، بیشترین اتفاقاتی که در دنیا رخ می دهد دو حالت دارد. آزمایش برنولی یک آزمایش تصادفی است که نتیجه آن را میتوان به یکی از دو حالت کامیابی و ناکامی دسته بندی کرد.

توزیع برنولی را میتوان به صورت $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ نشان داد.
در حالیکه P احتمال کامیابی و $q=1-P$ احتمال عدم کامیابی می باشد . هرگاه یک آزمایش را n دفعه تکرار کنیم یک ترادف به دست می آید طوری که اگر احتمال کامیابی هر آزمایش P و احتمال ناکامی آن q باشد در این صورت احتمال m کامیابی در این n آزمایش عبارت از:

$$P(x\le m)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}\qquad\qquad 0\le m\le n$$

رابطه فوق را میتوان به صورت $B(m,n,P)$ نیز ارائه نمود.

اوسط توزیع دو جمله یی $\bar{x}=n\,.\,P$ و انحراف معیاری این توزیع $S=\sqrt{n\,.\,P\,.\,q}$ است.

توزیع احتمال پواسن:

فورمول پواسن می تواند برای محاسبه تقریبی m اشکال کامیابی از n آزمایش وقت که n بزرگ و احتمال کامیابی P کوچک باشد مورد استفاده قرار می گیرد.

فورمول پواسن برای محاسبه تقریبی احتمال m اشکال در n آزمایش عبارت از:

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}.\lambda^{m}}{m!}$$
$$\bar{x}=n.P \ \ ,e=2.718182$$

زمان که در توزیع دو جمله یی قیمت $P\to 0$ و $n\to\infty$ از توزیع احتمال پواسن استفاده می گردد.

یادداشت: فورمول پواسن را برای محاسبه احتمال تعداد مراجعات در زمان مشخص میتوان به صورت ذیل ارائه کرد.

λ : اوسط تعداد مراجعه ها در واحد زمان

t : نسبت زمان عنوان شده به کل زمان

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda\cdot t)^{m}}{m!}$$

توزیع نورمال:

منحنی های توزیع نورمال می تواند به چهار طریق با یکدیگر تفاوت داشته باشد. شکل ریاضی معادل توزیع نورمال که نشان دهندۀ تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ است به صورت زیر نوشته می شود.

S: انحراف معیاری
$$f(x)=N(x,\bar{x},S)$$

$f(x)$: ارتفاع منحنی
$$f(x)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right)^{2}}$$

توزیع نورمال از جمله توزیع های پیوسته است ، اختلاف در اندازه گیری ها را میتوان توسط توزیع به خوب تقرب نمود.

- ✓ شکل توزیع نورمال متناظر و شبه زنگوله است ، در توزیع نورمال شاخص های مرکزی با هم برابر اند و متحول های تصادفی پیوسته دارای ناحیه تعریف محدود می باشد ، تابع احتمال آن:

μ: اوسط جامعه
$$f(x)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\delta}\right)^{2}}$$

δ: انحراف معیار جامعه

مساحت تحت منحنی توزیع نورمال و استاندرد کردن آن:

برای محاسبه مساحت تحت منحنی تابع احتمال $f(x)$ در فاصله های a الی b میتوان از انتیگرال زیر استفاده نمود.

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2}$$

- ✓ توسط رابطۀ $Z = \frac{x-\mu}{\delta}$ میتوان هر مجموعۀ احصائیوی را که دارای توزیع نورمال است به نورمال معیاری ستاندرد تبدیل کرد.

Z: متحول معیاری نورمال و منحنی را بنام منحنی نورمال معیاری یا منحنی احتمال نورمال یاد مینماید.

بخاطر داشته باشید که متحول معیاری شده Z همیشه دارای اوسط صفر و انحراف معیاری 1 می باشد. همچنان مساحت بین منحنی نورمال و محور افقی برابر به واحد انتخاب شده می باشد. به صورت ساده:

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)dz$$

$$Z = \frac{x-\bar{x}}{S}$$

نمونه گیری: نمونه به دو دسته تقسیم می شود ، نمونه ساده و نمونه تصادفی.

روش های نمونه گیری:

نمونه گیری تصادفی: عناصر جامعه همه برای انتخاب شدن هم چانس باشد.

نمونه گیری سیستماتیک: عناصر جامعه به صورت منظم شماره $(Code)$ گذاری شده باشد.

نمونه گیری طبقه یی: جامعه به گروه های متجانس تقسیم شده باشند.

نمونه گیری خوشه یی: جامعه خیلی بزرگ باشد ، آن را به خوشه های مختلف تقسیم و از هر خوشه نمونه ای را انتخاب می کنند.

هر ویژه گی عددی یک جامعه (اوسط و انحراف معیار) را پارامتر جامعه می گویند.

هر ویژه گی عددی یک نمونه (اوسط و انحراف معیار) را آمار می گویند.

متحول های تصادفی $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ را یک نمونه تصادفی از متحول تصادفی x می گویند. اگر تابع مربوط آن به صورت $f(x_1, x_2, \dots \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots\cdots f(x_n)$ تعریف شده باشد.

- روش های نمونه گیری به صورت عموم عبارت است از:
  - نمونه گیری تصادفی
  - نمونه گیری منظم
  - نمونه گیری گروهی
  - نمونه گیری خوشه یی
- کمیت نمونه را اوسط نمونه و کمیت جامعه را پارامتر جامعه می گویند.

توزیع اوسط نمونه:

اگر $x_1 , x_2 , \dots \dots , x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه تابع احتمال $f(x)$ باشد ، در این صورت توزیع احتمال نمونه تصادفی عبارت است از:

x	x_1	x_2	$\cdots\cdots\cdots$	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots\cdots\cdots$	$\frac{1}{n}$

اوسط متحول $\overline{x_n}$ $\quad E(\overline{x_n}) = \mu$

واریانس متحول $\overline{x_n}$ $\quad V(\overline{x_n}) = \frac{1}{n}\delta^2$

واریانس نمونه $\quad S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

اوسط واریانس نمونه $\quad E(S^2) = \delta^2$

اوسط نمونه $\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

δ^2 : واریانس جامعه S^2 واریانس نمونه

قضیه لمیت مرکزی:

اگر از یک جامعه بزرگ N با اوسط متناهی μ و واریانس متناهی δ^2 یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب کنیم ، در این صورت اوسط نمونه یعنی $\bar{x}$ دارای توزیع تقریباً نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و واریانس $\delta_{\bar{x}}^2 =$

$\frac{\delta^2}{n}$ و متحول تصادفی $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}}$ دارای توزیع نورمال معیاری است. در حالیکه ضریب $\frac{N-n}{N-1}$ برای قیمت های بزرگ N به عدد 1 نزدیک شود در حقیقت لمیت آن وقت که $n \to \infty$ مساوی به یک است.

توزیع نمونه نسبت:

اگر x متحول تصادفی ، n مجموعه آزمایش های برنولی و P احتمال موفقیت هر آزمایش باشد در این صورت آماره نسبت نمونه $\hat{P} = \frac{x}{n}$ و اوسط $E(x) = n \, . P$ و وریانس متحول تصادفی $V(x) = n . P \, . q$ می باشد.

توزیع $\hat{P}$: $\hat{P} = 0 , \frac{1}{n} , \frac{2}{n} , \ldots \ldots$ $f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} (1-P)^{n(1-\hat{P})}$

اوسط $\mu_P = E(\hat{P}) = P$

وریانس متحول تصادفی $\delta_{\hat{P}}^2 = V(\hat{P}) = \frac{Pq}{n} = \frac{P(1-P)}{n}$

توزیع های نورمال معیاری $Z = \frac{x-nP}{\sqrt{nPq}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{P.q}{n}}}$

فصل پانزدهم

احتمالات

- یک اتفاق را می توان به سه درجه حتمی – ممکن و ناممکن و یا کلمات معادل آن پیش بینی نماییم. برای پیش بینی یک اتفاق ، یک واقعهٔ ناممکن را با 0% و احتمال یک واقعه مطمئن یا امکان پذیر قطعی را با 100% یا 1 نشان می دهند. احتمال واقعه های ممکن بین اعداد 0 و 1 واقع می گردد.
- زمان که چانس یک حادثه را به عدد بیان نماییم به نام احتمال یاد می گردد.

چانس: حوادث که از نگاه عددی قابل نباشد ، در پیش بینی برای آنها از کلمه چانس استفاده می گردد.

احتمال: هرگاه چانس یک اتفاق با اعداد و ارقام پیش بینی گردد ، به نام احتمال حادثه اتفاقی یاد میگردد .
احتمال یک واقعه ناممکن صفر و احتمال یک حادثه مطمئن یک است.

حادثهٔ اتفاقی : تجربه که نتیجه ممکنه آن هنگام اجرا معلوم نباشد به نام حادثه اتفاقی یاد میگردد.

تجربه تصادفی: یک فعالیت که تا هنوز نتایج ان معلوم نباشد و یا حادثه به صورت تصادفی اتفاق افتد به نام تجربه تصادفی یاد می گردد.

احتمال تجربی: احتمال که توسط انجام تجربه به شکل عملی یا از روی تعداد نتایج یک تجربه به دست می آید ، احتمال تجربی یاد میگردد.

احتمال نظری: احتمال که از روی فضای نمونه از نسبت حالت مساعد بر تعداد کل حالات یک تجربه به دست می آید ، احتمال نظری یاد می گردد.

- حادثه که هنوز نتایج آن به صورت قطعی معلوم نباشد و حادثه به صورت تصادفی اتفاق افتد تجربه تصادفی یاد میگردد . برای حوادث که تصادفی و یا اتفاق می افتد ، پیش بینی معنی ندارد.
- تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را به یک مجموعه یا Set نشان داده می توانیم که به نام فضایی نمونه یاد می شود.
- هر عنصر فضایی نمونه ، یک نتیجه ممکن همان تجربه تصادفی بوده که به نام حوادث اولیه یاد میگردد.

کثرت نسبی و احتمال:

- احتمال ، قبل از وقوع حادثه برای پیش بینی یک حادثه ، مورد استعمال قرار گرفته ، اما کثرت نسبی بعد از انجام یک تجربه به اساس ارقام به دست آمده از انجام تجربه اتفاقی حساب می گردد.
- احتمال تجربی برای یک حادثه اتفاقی مساوی به کثرت نسبی حادثه می باشد.
- چون مجموع کثرت نسبی تمام حالات مساوی به یک است ، بنابر این مجموع احتمال همه حالات نیز مساوی به یک است.

❖ کثرت نسبی یک تجربه عبارت از نسبت کثرت مطلق نظر به تعداد کل دفعات انجام یک تجربه می باشد ، اما احتمال یک حادثه قبل از وقوع آن پیش بینی می گردد.

❖ کثرت نسبی حادثه A را به $h(A)$ نشان داده و $0 \leq h(A) \leq 1$ می باشد.

چانس برابر و نا برابر در یک فضایی نمونه:

تا به حل با حوادثی روبرو بودیم که احتمال عناصر اولیه فضایی نمونه با هم یکسان بودند ، که بر اساس آن تعریف احتمال صورت گرفته است.

احتمال را معمولاً به P نمایش داده و $P(A)$ احتمال حادثه اتفاقی A می باشد.

هرگاه یک فضایی نمونه ، n عنصر داشته باشد ، در این صورت احتمال هر حادثه اولیه E (غیر قابل تجزیه) مساوی به $P(E) = \frac{1}{n}$ می باشد.

❖ حوادث که در انجام یک تجربه تصادفی یکی بر دیگری هیچ گونه برتری و یا هم شرایطی برای وقوع چانس بیشتر آن در یک فضایی نمونه نداشته باشند ، بنام حوادث با چانس برابر یاد میگردد.

حادثه اتفاقی یک فضایی نمونه:

هر ست فرعی یک فضایی نمونه بحیث حادثه اتفاقی ، همان تجربه می باشد ، ست خالی یک حادثه اتفاقی ناممکن و S یک حادثه اتفاقی مطمئن می باشد.

هرگاه تعداد عناصری یک فضأ نمونه مساوی به n عنصر باشند ، تعداد مجموع حوادث اتفاقی آن 2^n است.

قواعد احتمال:

- احتمال حادثه اتفاقی E همیشه بین 0 و 1 است. $0 \leq P(E) \leq 1$
- هرگاه S یک فضایی نمونه باشد ، $P(S) = 1$ ، حادثه اتفاقی S به نام حادثه مطمئن نیز یاد میگردد.
- برای حادثه ناممکن داریم $P(\emptyset) = 0$

① $0 \leq P(E) \leq 1$
② $P(\{a_1, a_2\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) \qquad a_1, a_2 \in E$
③ $P(\emptyset) = 0 \qquad P(S) = 1$

دیاگرام درختی:

هر تجربه تصادفی را میتوان توسط یک دیاگرام که از نقطه شروع یک تجربه آغاز میگردد ، به تعداد نتایج ممکن شاخچه ها را ترسیم ، برای انجام مرتبه دوم ، تجربه را بار دیگر مانند قدم اول ، به هر نتیجه ممکنه شاخچه ها ترسیم میگردد ، گراف مذکور را که مانند درخت شاخ و پنجه می کند ، به نام دیاگرام درختی یاد میکنند.

- ✓ حاصل جمع احتمالات در هر نقطه انتشار شاخچه ها حتماً مساوی به یک است.
- ✓ حاصل جمع احتمالات تمام حوادث اولیه نیز مساوی به یک است.
- ✓ هر تجربه تصادفی از نقطه شروع به شاخچه های حوادث ممکن اتفاقی جدا تقسیم می شوند ، با انجام مرتبه دوم آن ، مانند قدم اول به هر نتیجه ممکنه بحیث نقطه آغاز بار دیگر شاخچه های حوادث اتفاقی گراف رسم میگردد ، به همین ترتیب روش ادامه می یابد ، احتمال هر حادثه اولیه به دست آمده ، عبارت از حاصل ضرب احتمالات هر بند شاخچه های که از نقطه آغاز روی مسیر مطلوب ما را به انجام آن می رساند می باشد.

قاعده اول مسیر (حاصل ضرب):

احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه در پایان هر مسیر معین در گراف درختی مساوی به حاصل ضرب احتمالات هر شاخچه از طریق مسیر مطلوب می باشد.

- هر مسیر ما را به یک نتیجه جداگانه می رساند.
- هر مسیر گراف درختی در انجام یک تجربه به یک حادثه اتفاقی اولیه می انجامد.
- رسیدن به هر حادثه اتفاقی اولیه ، از مسیر های مختلف و نقاط انتشار مختلف عبور می کند.
- احتمال یک حادثه اولیه عبارت از حاصل ضرب احتمال ها از آغاز مسیر تا حادثه می باشد.

اتحاد حوادث اتفاقی:

- هرگاه در یک فضایی نمونه S طوریکه حوادث اتفاقی $A \leq B$ باشد ، در این صورت $A \cup B = B$
- در یک فضای نمونه S، هرگاه A و B حوادث اتفاقی باشند ، حوادث $A \cup B$ و $B \cup A$ از هم فرق ندارند ، یعنی

$$A \cup B = B \cup A$$

- هرگاه در یک فضایی نمونه S ، یک حادثه A یا B اتفاق افتد ، پس حادثه اتفاقی $A \cup B$ نیز اتفاق افتاده و علاوتاً صورت می گیرد.

$$A \leq A \cup B \quad \text{و} \quad B \leq A \cup B$$

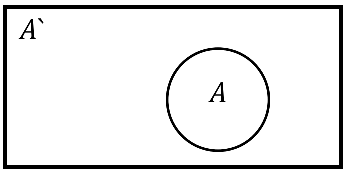
- حادثهٔ A در فضای نمونه اتفاق افتاده و یک حادثه دیگری که هیچ وقت اتفاق نمی افتد یعنی $\emptyset$ به معنی اینست که تنها حادثه A اتفاق افتاده است. $A \cup \emptyset = A$
- حادثهٔ اتفاقی $A \cup B$ به معنی این است که حد اقل حادثه A یا B اتفاق افتاده است.

نتیجه: در یک فضایی نمونه S ، برای حوادث اتفاقی A، B و C داریم.

- حوادث اتفاقی $A \cap B$ و $B \cap A$ حوادث یکسان اند.
- هر یک از حوادث اتفاقی A و B حادثهٔ اتفاقی $A \cap B$ را دربر دارد.
- اگر برای حوادث غیر خالی A و B ، $A \cap B = \emptyset$ ، $A \cap S = A$
- هرگاه حادثه B حادثه A را در بر داشته باشد ، پس $A \cap B = A$ می باشد.

ست کلی و مکمله :

هرگاه S یک فضایی نمونه و A یک حادثه اتفاقی آن باشد:



- $\bar{A}$ حادثه اتفاقی یی است که همزمان با آن حادثه A اتفاق نمی افتد.
- برای هر حادثه اتفاقی A صورت می گیرد:

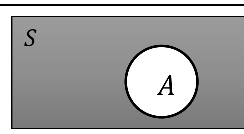
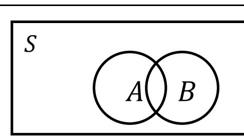
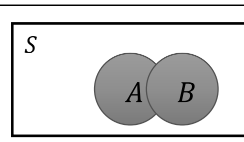
a) $A \cup A` = S$

b) $P(A \cup A`) = P(S) = 1$

c) $P(A`) = 1 - P(A)$

اصل شمارش:

- در ترکیب عناصر دو ست ، تعداد امکانات کلی مساوی به حاصل ضرب تعداد عناصر هر یک از مجموعه های ترکیبی می باشد.
- اگر تعداد امکانات و یا عناصر یک ست m عدد و تعداد عناصر ست دیگر مساوی به n عدد باشد ، در این صورت هر دو انتخاب با هم به تعداد $m \times n$ شکل امکان پذیر می باشند.

بیان حادثه اتفاقی	ارائه بیان توسط ست	دیاگرام $venn$ حادثه اتفاقی	احتمال حادثه
تمام حوادث اتفاقی S که شامل حادثه اتفاقی A نباشد ، مکمله A و یا حادثه عکس A	$\bar{A} = S - A$ $S = A \cup A`$		چون $P(S) = 1$ است $P(A) = 1 - P(A`)$
حادثه اتفاقی A و حادثه اتفاقی B واقع می شود	$A \cap B$		$P(A \cap B)$
حد اقل یکی از حوادث اتفاقی A یا B اتفاق می افتد	$A \cup B$		$P(A \cup B) =$ $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ترتیب یا $Permutation$:

تعداد ترتیب تکرار وجود دارد که با دقت با حالت بدون تکرار تعداد مجموعی آن برابر است با $P_n^k = \frac{n!}{k!}, (k \leq n)$ n عنصر را به P_n نشان داده (در صورتیکه تکرار مجاز و یا ممکن نباشد) مساویست به

$P_n = n!$

و اما در صورتیکه تکرار مجاز باشد ، تعداد ترتیب های با تکرار مساوی به P_n^k بوده و چنین معنی می دهد که k مرتبه در n ترتیب $\binom{n}{k}$ n بالای k : طرز نوشته ای $\binom{n}{k}$ که n بالای k خوانده می شود ، در حقیقت ضریب بینوم که عدد k آن توان بینوم را مشخص میکند عبارت است از:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ , \ \ k, n \in N \ \ , 0 \leq k \leq n$$

تعداد ترکیب r شی از یک ست n عنصری عبارت از $C_r^{(n)}$ بوده و مساوی است به:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad r \leq n$$

ترکیب $Combination$:

تعداد ترکیب های r یک ست n عنصری عبارت از ترکیب یا r $Combination$ شی از n بوده که $C_{(r)}^n$ نشان داده شده است.

نتیجه: در انتخاب یک گروپ k عنصره از یک ست n عنصره بصورت کل بدو شکل صورت گرفته که در یکی آن ترتیب در نظر بوده اما در دیگر آن ترتیب مهم نبوده صرف ترکیب آنها مورد علاقه می باشد ، بدین ترتیب برای ترکیب k شی متمایز تعریف زیر را در نظر می گیریم.

تعریف: تعداد ترکیب k عنصر از n عنصر یک ست که معمولاً به $C_{(k)}^n$ نشان داده و عبارت از تعداد امکانات $\binom{n}{k}$ ترکیب از n عنصر مختلف که به تعداد k عنصر آن را بدون ترتیب انتخاب مینماییم عبارت است از:

$$C_{(k)}^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0 \leq k \leq n$$

تبدیل $Variation$:

تعداد ترکیب های که ترتیب مسلسل k عنصر انتخابی مورد نظر از n عنصر در آن مطلوب باشد مساوی به $V_n^k = k! \cdot C_n^k = k$ تبدیل یا وریشن یاد می شود.

$$V_k^n = k! \cdot C_{(k)}^n = k! \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

شکل انتخاب و یا هم آمیختن k عنصر از n عنصر	تعداد امکانات	
	بدون تکرار $k \geq n$	با تکرار $k \leq n$
ترتیب $Permutation$	$P_n = n!\ \ , n = k$	$P_k^n = \frac{n!}{k!}$
ترکیب $Combination$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل $Variation$	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

یادداشت: $(a+b)^n = C_r^n \cdot a^{n-r} \cdot b^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^r$

احتمال خط آمدن k مرتبه عبارت است از : $P_{(\text{خط آمدن})} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

قضیه بینوم:

انکشاف دو جمله یی $(a+b)^n$ عبارت است از: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$

در تکرار n بار تجربه تصادفی دو جمله یی که هر حالت دارای احتمال P و $q = 1 - P$ بوده احتمال k بار پیروزی یعنی P از n بار بقیه حالت ها که ناکامی یعنی $q = 1 - p$ بوده داریم:

احتمال k بار پیروزی و انجام n بار تجربه $= \binom{n}{k} P^{n-k} \cdot (1-P)^k \quad ,0 \leq k \leq n$

طرز نوشته $B(n, P, k)$ طرز ارائه بینوم یا احتمال پرابلم برنولی یاد گردیده عبارت است از:

$$B(n\,, P\,, k) = \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$$

بنابرین انکشاف بینوم را میتوان به شکل زیر بنویسیم. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k (1-P)^{n-k}$

یادداشت:

I. $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots\cdots\cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

II. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots\cdots\cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

احتمال دو جمله یی:

هر تجربه تصادفی را میتوان به یک تجربه که دارای دو حالت باشد میتوانیم تقلیل دهیم.

هر فضای نمونه و یک تجربه دو حالت دارد اگر یکی از حالت ها بحیث پیروزی دارای احتمال P در نظر گرفته شود حالت دیگر آن عبارت از حالت ناکامی بوده که دارای احتمال $1 - P$ می باشد. با تکرار n بار تجربه ،

احتمال k بار پیروزی یعنی P از این n بار که بقیه حالت ها که باخت یا شکست یعنی $q = 1 - P$ بوده داریم:

$$0 \leq k \leq n \qquad \binom{n}{k} P^{P-k}(1-P)^{k} = \text{احتمال } k \text{ بار پیروزی در انجام } n \text{ بار تجربه}$$

فضا نمونه گسسته و پیوسته:

فضا های نمونه ای یک تجربه اتفاقی عبارت از مجموع معیین یا محدود و یا نامعیین یا غیر محدودی اند که یک دسته آنها قابل شمارش $Countable$ و دستهٔ دیگر آنها غیر قابل شمارش $Uncountable$ می باشد . فضای نمونه که عناصر آن ها قابل شمارش و تشخیص اند به نام فضای نمونه گسسته یا غیر متصل و فضای نمونه که عناصر آنها قابل شمارش نیستند به نام فضای نمونه متمادی یا پیوسته یاد می گردند.

فضای نمونه پیوسته به صورت یک انتروال روی محور اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی در مستوی و فضا می توانند ظهور نمایند.

حوادث هم چانس:

حوادث ساده اولیه که احتمال وقوع آنها در اثر انجام یک تجربه با هم برابر باشد ، به نام حوادث هم چانس یاد می گردد ، مجموع احتمالات حوادث اتفاقی هم چانس یک تجربه مساوی به یک است.

احتمال فضاهای پیوسته:

فضای نمونه پیوسته مجموع نامحدود یا نامعیین از نقاط می باشد ، که به شکل محور اعداد حقیقی ، سطح در مستوی و یا احجام در فضا می باشد ، چون نمایش این نقاط ممکن نیست بنابر این برای پیدا کردن نسبت احتمال از طول قطعه خط ها ، سطوح اشکال و یا حجم اجسام استفاده مینماییم. معمولاً برای استفاده از محور اعداد یک متحول x ، قسمت از یک مساحت از دو متحول x و y و بلآخره برای احجام از متحولین y, x و z استفاده به عمل می آوریم.

احتمال مشروط:

هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشد ، طوریکه $P(B) \neq 0$ در این صورت احتمال $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به نام احتمال مشروط حادثه اتفاقی A نظر به حادثه اتفاقی B یاد میگردد.

یادداشت:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

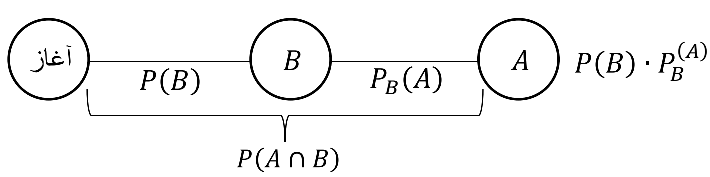
$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(B) \cdot P_B(A)}$$

فورمول عمومی

$$P_A(Bi) = \frac{P_{Bi}(A) \cdot P(Bi)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + \cdots\cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap Bi)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

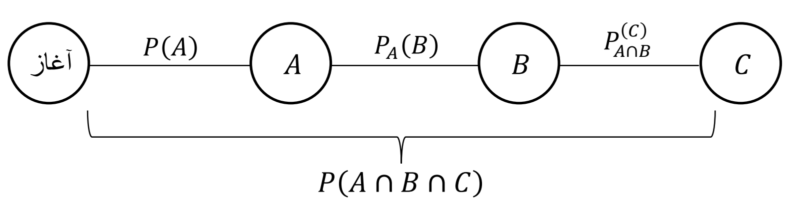
اصل حاصل ضرب:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$



این مطلب را برای سه حادثه اتفاقی B, A و C به شکل زیر توسعه می دهیم.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A^{(B)} \cdot P_{A \cap B}^{(C)}$$



فورمول $Bays$:

$$P_A^{(B_i)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{Bi}^{(A)}}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_k}^{(A)}}$$

استقلالیت حوادث اتفاقی:

دو حادثه اتفاقی A و B که بالای همدیگر تاثیر گذار نباشند به نام حوادث اتفاقی مستقل یاد می گردند.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (اصل حاصل ضرب)

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (اصل حاصل جمع)

$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

فصل شانزدهم

منطق ریاضی

استدلال درک شهودی:

در بسیاری حالتها ، استدلال درک شهودی باعث تلاش و پیگیری حل مسأله و ایجاد انگیزه یی می باشد که باعث طرح پرسشهای جدید تری می گردد.

مثال: با استدلال درک شهودی به سهولت می توان حکم کرد که دو خط موازی همدیگر را قطع نمی کنند. چون در پذیرش این مسأله استدلالی بکار نرفته و در واقع یک احساس است که بر اساس آن این حکم صورت می پذیرد. این گونه نتیجه گیری را به نام «درک شهودی» یاد می نمایم.

مثال: یک نقط در خارج دایره یی به قطر 4 واحد قرار دارد ، برای مطالعۀ فاصلۀ آن از مرکز دایره ، که بیش تر از 2 واحد است ، نمی توان گفت که استدلال مذکور یک درک شهودی است، زیرا برای وضاحت این مسأله لازم است تا استدلال نمایم چون فاصلۀ مرکز دایره از محیط آن 2 واحد بوده و نقطه در خارج محیط قرار دارد ، بنابر این فاصلۀ

نقطه از مرکز دایره از محیط آن 2 واحد می باشد ، یعنی با در نظر داشت یک دانش و یا احساس غریزه یی بدون استدلال نمی توانیم مسأله را درک و صحت آن را قبول نمایم..

استدلال تمثیلی یا قیاسی:

قیاس و یا تمثیل ، در حقیقت نوعی از یافتن تشابه بین مفاهیم گوناگون است ، بنابر این تمثیلها می تواند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم یا قضایای ریاضی بکار رود. استدلال تمثیلی به حیث یک ثبوت حساب نمی شود. اما زمینه ساز آن است.

مثال: ضرب المثل عامیانه «مار گزیده از ریسمان ابلق می ترسد» یک استدلال قیاسی است ، زیرا ریسمان ابلق با مار مقایسه شده است و بین آنها شباهتی دیده شده است.

مثال: از تمثیل و یا قیاس برای درک این حقیقت که حاصل ضرب یک عدد منفی در عدد منفی ، یک عدد مثبت و حاصل ضرب یک عدد منفی در عدد مثبت ، یک عدد منفی است ، استفاده می کنیم.

هرگاه لایق بودن یک شاگرد را (+) و برای نیست (−) را در نظر گرفته ، آنها را ترکیب نماییم ، در نتیجه داریم.

لایق (+) نیست (−) = منفی (−)

لایق (+) است (+) = مثبت (+)

نالایق (−) نیست (−) = مثبت (+)

نا لایق (−) است (+) = منفی (−)

استدلال استقرایی:

استدلال استقرایی عبارت از روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است. در واقع تعمیم دادن خاصیتی در مورد یک نمونهٔ کوچک به نمونهٔ بزرگ است.

مثال: «مشت نمونهٔ خروار است» به استدلال استقرایی اشاره می کند، زیرا در این مثال از یک نمونهٔ کوچک ، نتیجه گیری مشخص در مورد کل مجموعه گرفته می شود ، در واقع بر پایهٔ تعدادی محدودی از مشاهدات ، از مسأله نتیجه گیری شده است بنابر این استدلال استقرایی بکار گرفته شده است.

مثال: یک شاگرد به طور اتفاقی در چندین مرحله، سه عدد متوالی را با هم ضرب نموده که حاصل ضرب هر سه عدد متوالی مضرب 6 است، بناً شاگرد مذکور استدلال استقرایی را بکار برده و چنین حکم می کند که حاصل ضرب هر «سه عدد متوالی» مضرب 6 است.

استدلال ریاضی (بازی دو مینو):

هرگاه $P(n)$ حکمی در بارهٔ اعداد طبیعی n داده شده باشد ، با مطالعهٔ حکم در برابر $n = 1$ ، یعنی اگر $P(1)$ درست باشد ، در قدم دوم از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ را به حیث نتیجهٔ درست به دست آوریم در این صورت ادعای $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست می باشد.

مثال: نشان دهید که $P(n) = 4^{2n} - 1$ برای هر عدد طبیعی ، قابل تقسیم بر 5 است.

حل: ادعا برای $n = 1$ درست است ، زیرا که:

$$n = 1\ ,\quad P(1) = 4^{2\cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

دیده می شود که عدد $P(1) = 15$ بر 5 قابل تقسیم است.

برای هر عدد طبیعی k قبول می کنیم ، که ادعای فوق صدق می کند ، یعنی $P(k) = 4^{2k} - 1$ بر 5 قابل تقسیم است بنابر این چون بر 5 قابل تقسیم است ، می توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r$$

برای $n = k + 1$ نیز ادعای مذکور درست است ، یعنی:

$$n = k + 1\ , P(k+1) = 2^{2(k+1)} - 1$$

اطراف رابطه را ضرب 4^2 نموده داریم که :

$$4^2\left(4^{2k} - 1\right) = 5r\cdot 4^2$$
$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r\cdot 16$$
$$4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16\cdot(5r)$$
$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

طرف راست رابطهٔ فوق $5(3+16r)$ نشان می دهد که طرف چپ مساوات بر 5 قابل تقسیم است.

رابطهٔ اخیر نشان می دهد که $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ نیز بر 5 قابل تقسیم است ، چون از صحت $P(k)$ صحت

$P(k+1)$ را نتیجه گرفتیم، بنا بر این نظر به اصل استقرایی ریاضی ، ادعای $P(n)$ در برابر هر عدد طبیعی n نیز درست می باشد.

مثال: با استفاده از استقرای ریاضی ثبوت کنید که رابطهٔ زیر برای هر عدد طبیعی n درست است:

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: برای صحت رابطهٔ فوق ، در برابر $n=1$ داریم :

$$P(1)=1\times2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times2\times3}{3}=2$$
$$\Rightarrow 2=2$$

بنابر این ، رابطه در برابر $n=1$ صحیح بوده ، حال اگر برای $n=k$ صحت آن را قبول نماییم ، مسأله را برای $n=k+1$ به اثبات می رسانیم ، بنابر این داریم :

$$n=k$$
$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

فرضیه استقرا: با فرض رابطهٔ بالا برای $P(n)$ ، با در نظر داشت $n=k+1$ می خواهیم صحت رابطه را نشان دهیم بنابر این داریم :

$$n=k+1$$
$$P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

حکم استقرا: با در نظر داشت فرضیهٔ استقرا داریم:

$$P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

بنابر این رابطه برای $n = k + 1$ نیز درست بوده ، و به این ترتیب رابطهٔ $P(n)$ در برابر هر n از اعداد طبیعی درست می باشد.

استدلال استنتاجی:

با استفاده از حقایقی که درستی آن را در قدم نخست پذیرفتیم نتیجهٔ عمومی تری را به دست آورده که به نام «استدلال استنتاجی» یا روش نتیجه گیری یاد می گردد به عبارت دیگر ، استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آنها را ثبوت و یا پذیرفته باشیم . وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می کنیم . مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

مثال :

یک عدد را به صورت اختیاری انتخاب کنید.	4	7	12
به عدد مذکور عدد 5 را اضافه کنید.	9	12	17
نتیجه را دو چند نماید.	18	24	34
از نتیجهٔ حاصله ، عدد 4 را کم نمایید.	7	20	30
عدد را به 2 تقسیم نمایید.	7	10	15
عددی را که در اول انتخاب کرده بودید ، از عدد کم نمایید.	3	3	3

نکتهٔ اساسی ، که به نظر می خورد این است که ما در حقیقت بر مبنای عباراتی که درستی آنها را قبول کرده ایم ، نتیجهٔ بعدی را به دست آوردیم، این مسأله ما را مطمئن می سازد که با انتخاب هر عدد اختیاری نتیجه همیشه یکسان و مساوی به 3 می باشد.

استدلال مثال نقض:

هرگاه با مثال نشان دهیم که نتیجهٔ کلی نادرست و یا غلط است ، نادرستی ادعا را نشان داده که به نام مثال نقض یاد می گردد.

مثال: برای اثبات مسأله کافی است نشان دهیم که اعداد x و y وجود دارد که غیر ناطق بوده ، اما مجموع آنها $(x + y)$ ناطق است . برای این منظور هرگاه دو عدد $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 1 - \sqrt{2}$ را انتخاب نماییم ، داریم:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

دیده می شود که حاصل جمع انها مساوی به 2 ، که یک عدد ناطق است ، می باشد در حالی که x و y اعداد غیر ناطق است. بنابر این ، ادعا کرده نمی توانیم که مجموع دو عدد غیر ناطق همیشه یک عدد غیر ناطق می باشد.

برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم:

هرگاه با فرضیه یا قبولی عکس ادعای یک قضیه یا مسأله به نتیجهٔ خلف برسیم ، در این صورت فرض ما نادرست بوده که خلاف آن درست است این گونه استدلال را به نام برهان خلف و یا ثبوت غیر مستقیم می نامند.

یادداشت:

به خاطر بسپارید که برای استفاده از برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم ، گامهای زیر را در نظر می گیریم.

قدم اول- فرض می کنیم ادعای مطلوب درست باشد.

قدم دوم- نشان می دهیم که این فرضیه نتیجه یی به دست می دهد که حقایق دانسته شده را نقض می کند.

قدم سوم- حالا که نتیجه به یک تناقص رسیده است معلوم می شود که فرضیهٔ قدم اول نادرست بوده بنابر این مطلب باید درست باشد.

مثال : نشان دهید که اگر n^2 یک عدد جفت طبیعی باشد ، n نیز جفت است.

حل : به خاطر ثبوت مسأله فرض می کنیم که با وجود جفت n^2 ، n یک عدد طاق است ، پس می توان آن را به شکل

$n = 2k + 1$ نوشت ، در حالی که k یک عدد تام است ، در نتیجه برای مربع عدد مذکور داریم :

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k^2+k)+1$$
$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2+k)+1$$

رابطه بالا نشان می دهد که n^2 یک عدد طاق است ، در حالی که خلاف فرضیه بوده و در نتیجه فرضیهٔ گرفته شده در بالای این که n یک عدد طاق است ، نادرست بوده و به این نتیجه می رسیم که n نیز یک عدد جفت می باشد زیرا فرض طاق بودن آن ما را به نتیجه یی می رساند که n^2 نیز باید طاق باشد.

منطق ریاضی و استنتاج بیان:

هر جمله نمی تواند یک بیان باشد ، یک جمله می تواند پرسشی ، امری ، تعجبی ، و یا خبری باشد. هر جمله خبری درست یا نادرست است.

یادداشت:

اگر یک بیان را P بنامیم در این صورت طر نوشتن $P \equiv T$ برای بیان درست و $P \equiv F$ برای بیان نادرست استعمال می گردد. بر علاوه $\sim P$ نفی بیان P می باشد.

جدولی که در آن ارزیابی یک بیان صورت گرفته باشد به نام جدول صحت یاد می کنند بنابر این برای هر بیان P داریم:

$P \equiv T , \sim P \equiv T$

P	$\sim P$
T	F
F	T

ترکیب بیان ها :

اگر دو بیان p و q داده شده باشد ، در این صورت :

1. ترکیب $p^\wedge q$ به نام ترکیب عطفی («و» منطقی) بیانات p و q یاد می گردد. علامهٔ $(^\wedge)$ به معنای (و) بکار رفته است.
2. ترکیب $p \vee q$ به نام ترکیب فصلی («ی» منطقی) بیانات p و q یاد می گردد. علامهٔ $\vee$ به معنای (ی) بکار رفته است.
3. ترکیب $p \Rightarrow q$ به نام ترکیب مشروط و یا «اگر p پس q خوانده شده» یاد می گردد. و علامهٔ $(\Rightarrow)$ نشان می دهد که p اساس ترکیب شرطی می باشد که p از q آن نتیجه می شود.
4. ترکیب $p \Leftrightarrow q$ به نام ترکیب مشروط دو طرفه و یا « p اگر و تنها اگر و q خوانده شده» یاد می گردد. و علامهٔ $(\Leftrightarrow)$ نشان می دهد که p اساس ترکیب شرطی می باشد ، q از آن نتیجه گردیده و اگر q اساس ترکیب شرطی باشد ، p از آن نتیجه می گردد.

به این ترتیب ، ترکیب «اگر و تنها اگر» بیانهای p و q را در جدول صحت زیر ملاحظه می نماییم.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$

T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

مثال: با تشکیل جدول صحت نشان دهید که $p \vee (p \Rightarrow q)$ همیشه درست است.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

از جدول صحت در ستون آخر مشاهده می نماییم که بیان $p \vee (p \Rightarrow q)$ همیشه درست است.